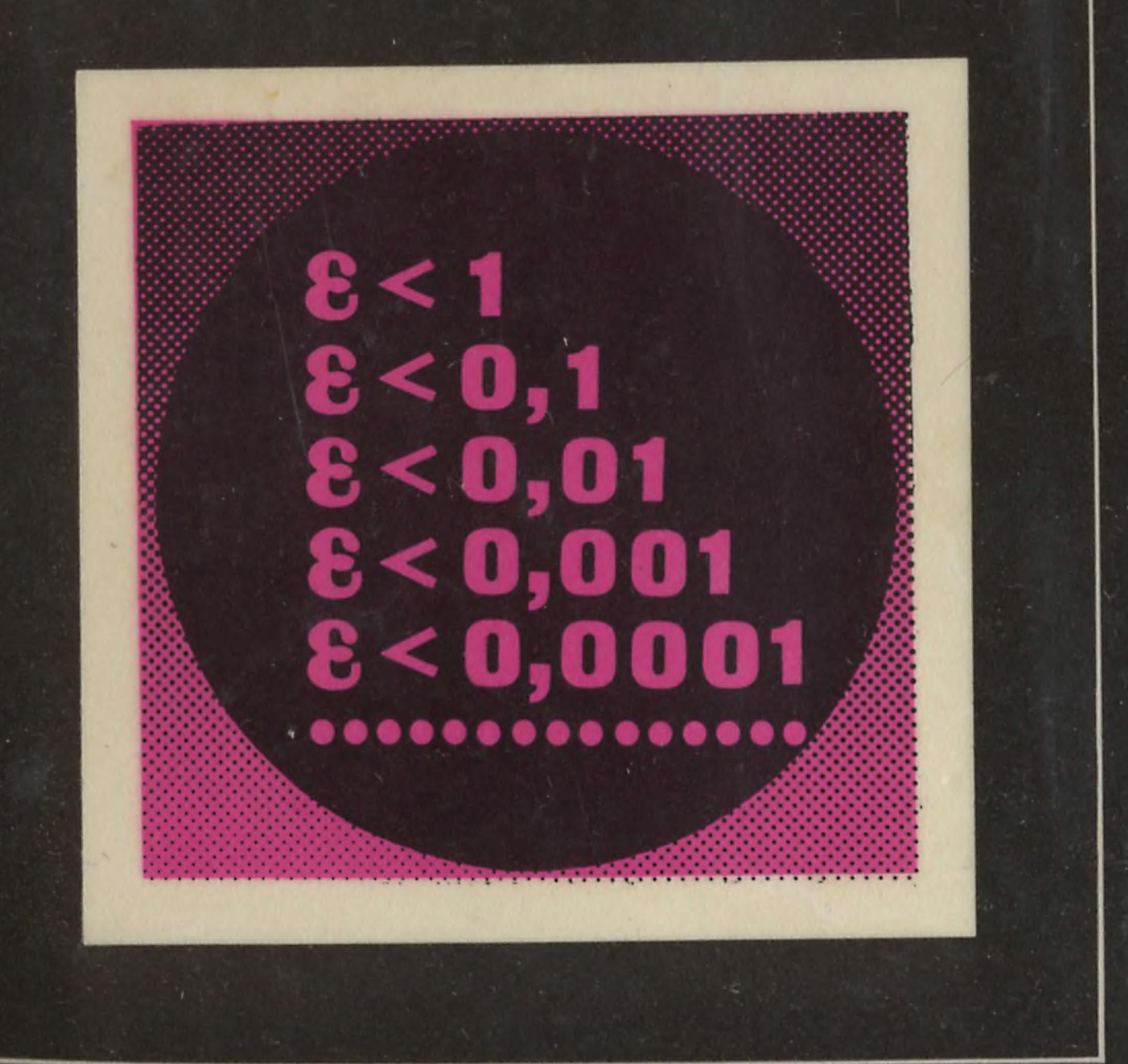
МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА
ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ
1983/8

В. А. Успенский

НЕСТАНДАРТНЫЙ, ИЛИ НЕАРХИМЕДОВ, АНАЛИЗ



ЗНАНИЕ
НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

Дорогому
Саше Шенко
с приветом
и благодарностью
В. Успен
21.09.83

НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА

8/1983

Издается ежемесячно с 1967 г.

В. А. Успенский

НЕСТАНДАРТНЫЙ, ИЛИ НЕАРХИМЕДОВ, АНАЛИЗ

Издательство «Знание» Москва 1983

ББК 22.16
У 77

Владимир Андреевич УСПЕНСКИЙ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической логики механико-математического факультета Московского университета. Специалист в области оснований математики, теории алгоритмов и математической логики, автор ряда популярных брошюр.

Рецензент: А. А. Арсеньев, доктор физико-математических наук

Успенский В. А.

У 77 Нестандартный, или неархимедов, анализ. — М.: Знание, 1983. — 64 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; № 8).
11 к.

В популярной форме даются начальные представления о новом научном направлении — нестандартном анализе, в основе которого лежат математические модели вещественной прямой с постоянными бесконечно малыми величинами в отличие от переменных бесконечно малых в традиционном математическом анализе.

Брошюра рассчитана на студентов, преподавателей, научных работников, лекторов и слушателей народных университетов, а также на всех, интересующихся новыми идеями в математике.

1702050000 ББК 22.16
517.2

К ЧИТАТЕЛЮ

Прежде чем начать чтение этой брошюры, вы, возможно, захотите узнать: а зачем, собственно говоря, нужен нестандартный анализ? Почему нас перестал устраивать традиционный («стандартный») анализ, верно служивший нашим учителям? Нужно ли ломать добротное здание современной математики, чтобы на его развалинах построить нечто загадочное и эфемерное по еще не вполне ясному плану?

Должен сразу же успокоить вас: нестандартный анализ вовсе не претендует на то, чтобы заменить, «свергнуть» уже имеющуюся «стандартную» математику и воцариться на ее месте — его притязания гораздо скромнее. Он возник в 1960 году, когда Абрахам Робинсон, специалист по теории моделей, понял, каким образом методы математической логики позволяют «оправдать» классиков математического анализа XVII и XVIII вв., поставив на строгую основу их рассуждения, использующие «бесконечно большие» и бесконечно малые величины. Таким образом, с самого начала шла речь не о каких-то новых «нестандартных» методах, не имеющих ничего общего с традиционной математикой, а о развитии новых средств внутри стандартной (теоретико-множественной) математики.

Нестандартный анализ остался бы любопытным курьезом, если бы единственным его приложением было обоснование рассуждений классиков математического анализа. К счастью, это не так: он оказался полезным и при развитии новых математических теорий. Нестандартный анализ можно, следуя авторам книги [23], сравнить с мостом, переброшенным через реку. Постройка моста не расширяет доступной нам территории (ведь и раньше можно было попасть на другой берег, обойдя исток реки), но сокращает путь с одного берега на другой. Подобным образом не-

стандартный анализ делает доказательства многих теорем короче.

Однако, быть может, главное значение нестандартного анализа состоит в другом. Язык нестандартного анализа оказался удобным средством построения математических моделей физических явлений. (Это не удивительно: недаром физики издавна любили говорить о бесконечно малых объемах, поверхностях и т. п.) Быть может, идеи и методы нестандартного анализа станут важной частью будущей физической картины мира. Во всяком случае уже сейчас многие специалисты по математической физике активно используют нестандартный анализ в своей работе.

§ 1. О НЕСТАНДАРТНОМ АНАЛИЗЕ (НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ)

Читатель, нашедший в серьезной научной монографии описание эндокринных систем грифонов и единорогов или химических реакций между философским камнем и флогистоном, будет, наверное, несколько ошарашен. А ведь отдельные страницы сочинений по нестандартному анализу могут произвести на неподготовленного читателя (впрочем, достаточно подготовленного, но именно в области обычной, стандартной математики) сходное впечатление. Вот некоторые примеры.

Пример 1. Вычислим производную функции $y=x^2$. Дадим аргументу x приращение dx, перейдя от точки x к точке $x+dx$. Выясним, насколько при этом изменилось значение функции. В точке x оно равнялось x^2. В точке $x+dx$ оно равняется $(x+dx)^2=x^2+2x\cdot dx+(dx)^2$. Таким образом, оно изменилось на $dy=2xdx+(dx)^2$ (рис. 1). Отношение приращения dy функции $y=x^2$ к приращению dx аргумента x равно

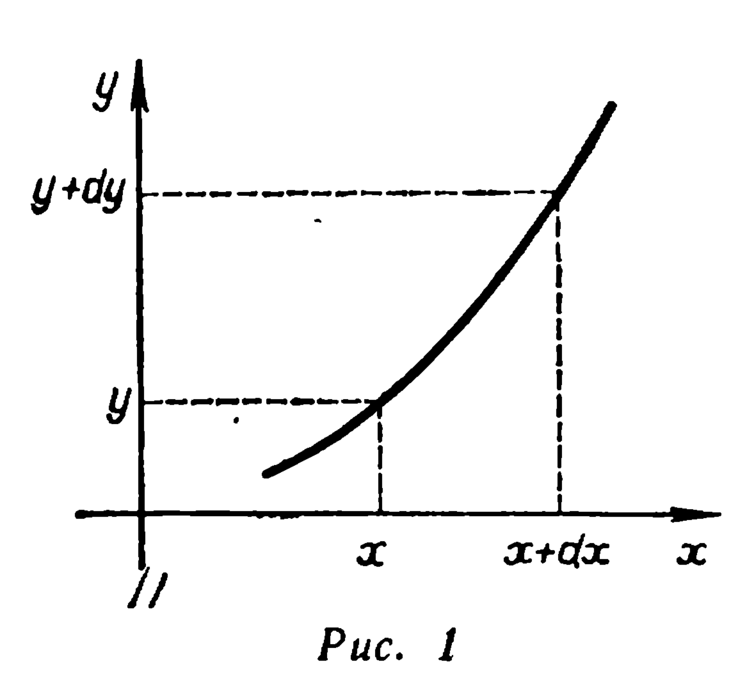


Рис. 1

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xdx+(dx)^2}{dx}=2x+dx.$$

Если dx бесконечно мало (запись: $dx\approx 0$), то членом dx в сумме $2x+dx$ можно пренебречь, и искомая производ-

ная (отношение приращения функции к приращению аргумента, если последнее бесконечно мало) равна $2x$.

Пример 2. Вычислим аналогичным способом производную функции $y=\sqrt{x}$. Приращение dy равно $\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}$; частное $\frac{dy}{dx}$ равно

$$\frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}=\frac{\sqrt{(x+dx}-\sqrt{x})(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x+dx-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}.$$

Взяв dx бесконечно малым, получаем, что производная равна

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 3. Этот пример относится не к вычислению чего-либо, а к определению — определению понятия интеграла. Итак, что же такое интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от функции f по отрезку $[a, b]$? Разобьем отрезок $[a, b]$ на бесконечно большое число H частей бесконечно малой длины dx (так что $b=a+Hdx$). Рассмотрим теперь сумму

$$f(a)+f(a+dx)+f(a+2dx)+\ldots+f(a+(H-1)dx),$$

состоящую из бесконечного числа членов, а именно из H членов. Значение этой суммы, умноженное на dx, и будем считать интегралом от функции f.

Следующие примеры предполагают повышенный уровень знакомства читателя с обыкновенной («стандартной») математикой; те из читателей, кому что-то покажется непонятным, могут пропустить эти примеры без ущерба для дальнейшего.

Пример 4. Доказательство равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Непрерывность функции f в точке x означает, что для любой бесконечно близкой к ней точки x' значение $f(x')$ бесконечно близко к $f(x)$; иначе говоря, для всякого x'

$$x'\approx x\Rightarrow f(x')\approx f(x), \quad (1)$$

где запись $\alpha \approx \beta$ означает бесконечную близость чисел α и β. Поскольку по условию функция f непрерывна в каждой точке x, то (1) выполняется для всех x и всех x'. Таким образом, бесконечная близость любых двух аргументов влечет за собой бесконечную близость значений функции, а это и означает равномерную непрерывность.

Пример 5. Построение неизмеримого множества. Каждое действительное число x, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1$, разлагаем в бесконечную двоичную дробь; для обеспечения однозначности запрещаем разложения с бесконечным числом идущих подряд единиц. Фиксируем произвольное бесконечно большое натуральное число ν и отбираем те действительные числа, у которых ν-й член разложения равен единице; множество всех отобранных таким образом действительных чисел неизмеримо по Лебегу.

Пример 6. Разложение синуса в бесконечное произведение. Отправляясь от равенства

$$«e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i, \qquad (2)$$

где i означает бесконечно большое число» (от латинского *infinitus*, что значит «бесконечный»; не путать с обозначением мнимой единицы, происходящим от латинского же *imaginarius* — «воображаемый»), «рассмотрим выражение

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i». \qquad (3)$$

Далее используем делимость двучлена $a^n - z^n$ на трехчлены вида $a^2 - 2az\cos(2k\pi/n) + z^2$, причем полагаем, $a = (1 + x/i)$, $z = (1 - x/i)$. «Так как дуга $2k\pi/i$ бесконечно мала,

$$\cos\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2k^2}{i^2}\pi^2 ». \qquad (4)$$

Поэтому «функция $e^x - e^{-x}$ будет делиться на $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}$, где член $\frac{x^2}{i^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на i он останется бесконечно малым. Кроме того, первый множитель будет равен x. Вследствие этого после расположения этих множителей по порядку будет

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} =$$

$$= x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)$$

и т. д.». (5)

Делая в тождестве (5) подстановку $x = z\sqrt{-1}$, получаем окончательно

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\dots \qquad (6)$$

Студент-математик, ответ которого на экзамене по математическому анализу содержал бы пересказ любого из изложенных примеров, надо думать, получил бы двойку. Однако способ вычисления производной, примененный в примерах 1 и 2, заимствован из § 7 гл. 2 книги Мартина Девиса «Прикладной нестандартный анализ» [3], примеры 4 и 5 прямо заимствованы из той же книги (теорема 5.8 из § 9 гл. 2), а определение интеграла взято (с несущественными изменениями) из книги Кейслера «Элементарный анализ» [27]. Пример 6 воспроизводит рассуждения Эйлера, содержащиеся в § 155—158 первого тома его сочинения «Introductio in Analysin infinitorum», опубликованного в 1748 г. (русский перевод с латинского см. в [9]). Текст, взятый при изложении примера 6 в кавычки, принадлежит непосредственно Эйлеру; заключительная формула (6) есть знаменитая формула Эйлера для синуса, верная при любом комплексном z.

Если примеры 1 и 2 хотя и могут шокировать нас наивной нестрогостью, но все же в известной мере соответствуют интуиции, то пример 4 противоречит на первый взгляд именно здравому смыслу: остается непонятным, почему проведенное рассуждение нельзя применить не к отрезку, а, скажем, к интервалу, для которого, как известно, теорема о равномерной непрерывности неверна. Примеры 3 и 6 (если не знать, что последний принадлежит Эйлеру) производят еще более странное впечатление, а пример 5 представляется просто-напросто абракадаброй.

Нестандартный анализ, однако, почти сплошь состоит из подобной «абракадабры», имеющей в нем точный математический смысл. Он позволяет, в частности, с новой точки зрения посмотреть на многие рассуждения класси-

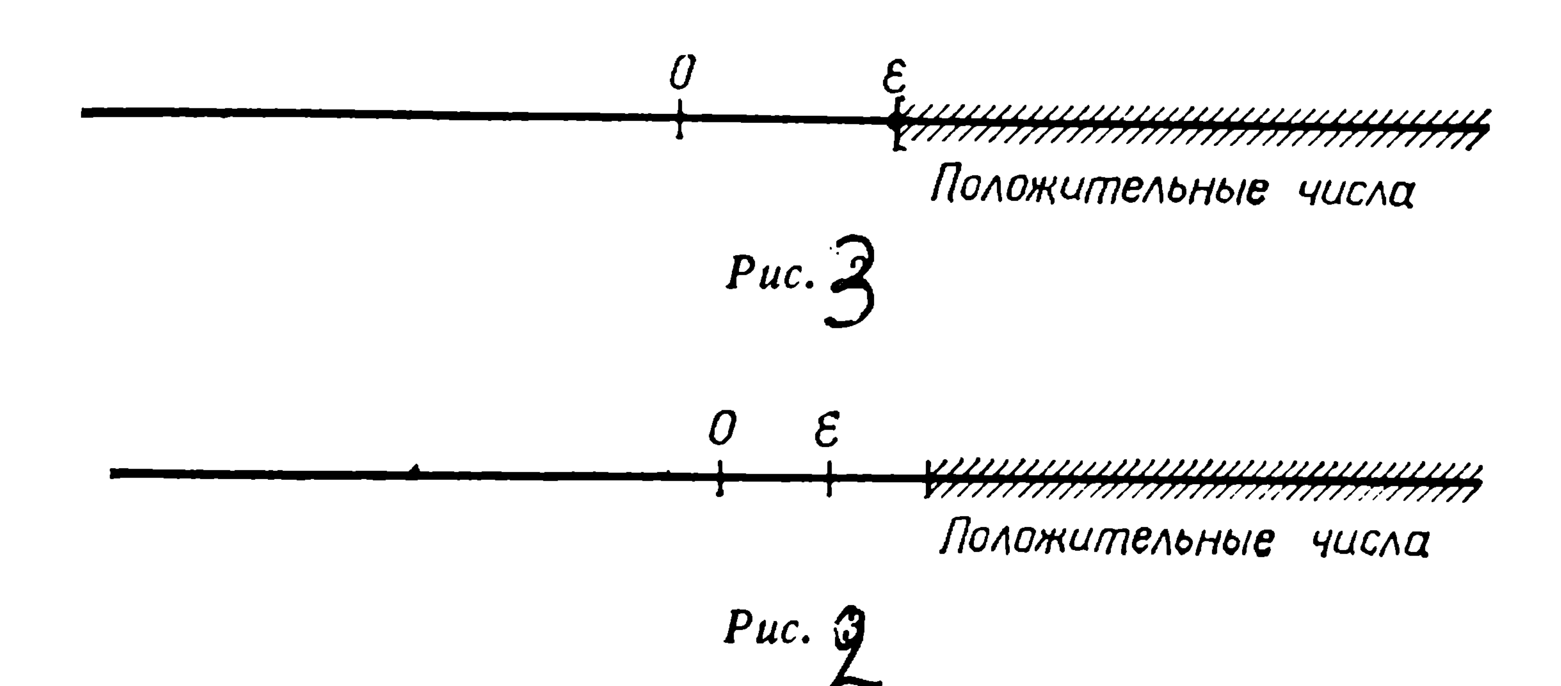
ков математического анализа, кажущиеся нестрогими, но приводящие к успеху, и путем относительно небольших уточнений сделать их удовлетворяющими современным критериям строгости.

§ 2. ЧТО ТАКОЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ?

Первое, что нужно уточнить в приведенных в предыдущем параграфе «нестандартных» рассуждениях, — это понятие бесконечно малой величины. Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины (т. е. не как функции, стремящиеся к нулю, — как учат нас современные учебники), а как величины постоянные. Уместно отметить, что такой подход хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. Что касается интуиции, то достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолкнуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и т. п. Все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Было бы неправильным считать подобного рода интуицию присущей лишь авторам учебников физики. Вряд ли какой-то математик воспринимает (наглядно) элемент дуги ds иначе, чем «очень маленькую дугу». Любой математик, составляя соответствующее дифференциальное уравнение, скажет, что за бесконечно малое время dt точка прошла бесконечно малый путь dx, а количество радиоактивного вещества изменилось на бесконечно малую величину dN.

Что же касается истории математического анализа, то в наиболее явной форме излагаемый подход проявился у одного из основоположников этой науки — Лейбница. Скоро — в мае 1984 г. — исполнится 300 лет с того дня, как символы dx и dy впервые появились на страницах математических публикаций, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница «Новый метод...» [5]. Именно Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления.

Итак, речь будет идти о бесконечно малых числах. Какое же число следует называть бесконечно малым?



Во-первых, конечно, нуль! Но это не интересно — интересно найти бесконечно малое число, не равное нулю (например, положительное). Какие положительные числа следует называть бесконечно малыми?

Первый — самый наивный — ответ таков: положительное число ε называется бесконечно малым, если оно меньше всех положительных чисел (рис. 2).

Легко понять, однако, что такого **не** бывает: если ε больше нуля, то оно является одним из положительных чисел, поэтому наше определение требует, чтобы число ε было меньше самого себя. Попытаемся исправить положение, потребовав, чтобы ε было меньше всех других положительных чисел, но больше нуля, т. е. чтобы ε было наименьшим в множестве положительных чисел. На числовой оси такое ε должно изобразиться самой левой точкой множества $]0, +\infty[$ (рис. 3). Это «определение» бесконечно малого числа часто приводят школьники, только что начавшие изучать математический анализ. К сожалению, числа ε с указанными свойствами тоже нет и быть не может: число $\varepsilon/2$ будет положительным числом, меньшим ε. (Согласно обычным свойствам неравенств для всякого $a>0$ выполняются неравенства $0<a/2<a$.) Так что если мы не хотим отказываться от привычных нам свойств действительных чисел (например, от возможности разделить любое число на 2 или от возможности умножить любое неравенство на положительное число), но хотим иметь бесконечно малые числа, то приведенное определение бесконечной малости не годится.

Более изощренное определение бесконечной малости числа $\varepsilon>0$, которое мы и будем использовать в дальнейшем, таково. Будем складывать число ε с самим собой, получая числа ε, $\varepsilon+\varepsilon$, $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$, $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$ и т. д. Если все

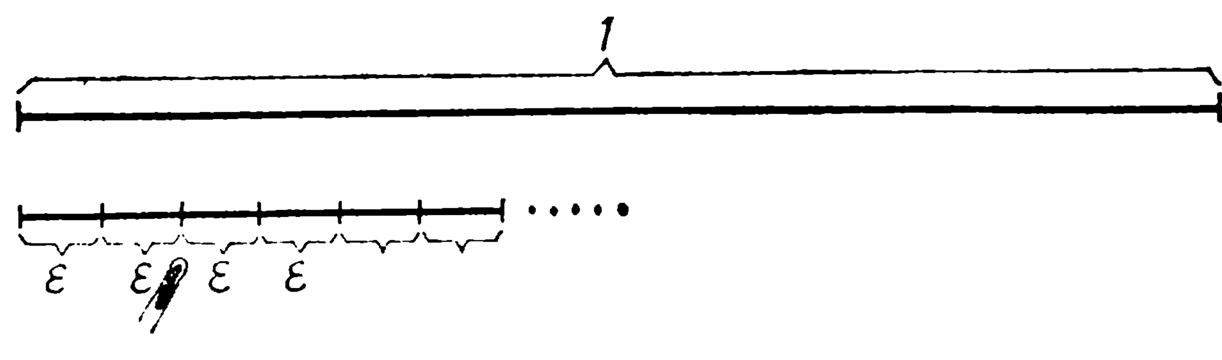


Рис. 4

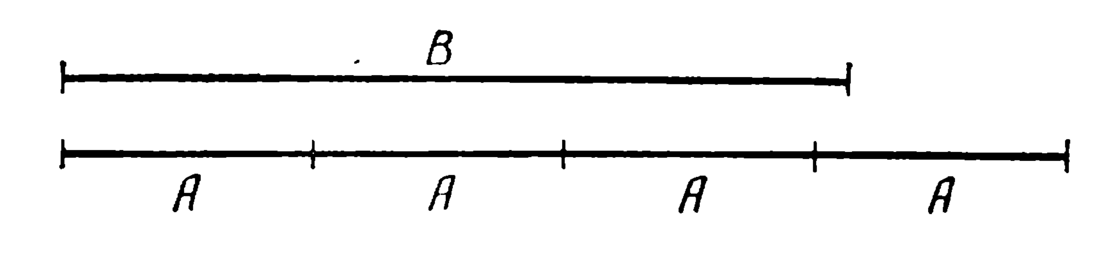


Рис. 5

полученные числа окажутся меньше 1, то число ε и будет называться бесконечно малым. Другими словами, если ε бесконечно мало, то сколько раз ни откладывай отрезок длины ε вдоль отрезка длины 1, до конца не дойдешь (рис. 4). Наше требование к бесконечно малому ε можно переписать и в такой форме (поделив на ε):

$$1<\frac{1}{\varepsilon},\quad 1+1<\frac{1}{\varepsilon},\quad 1+1+1<\frac{1}{\varepsilon},\ldots$$

Таким образом, если число ε бесконечно мало, то число $1/\varepsilon$ бесконечно велико в том смысле, что оно больше любого из чисел: 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1 и т. д. Так что если мы начнем измерять отрезок длиной $1/\varepsilon$ с помощью эталона длины (т. е. откладывая последовательно отрезки единичной длины), то процесса измерения никогда не закончим. Из сказанного можно видеть, что существование бесконечно малых противоречит так называемой аксиоме Архимеда, которая утверждает, что для любых двух отрезков A и B можно отложить меньший из них (A) столько раз, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок (B). (На рис. 5 потребовалось отложить отрезок A 4 раза.)

Приведенная формулировка касается отрезков; если считать (как это обычно делается), что длины отрезков являются числами, мы приходим к такой формулировке: для любых двух чисел a и b, для которых $0<a<b$, одно из неравенств $a+a>b$, $a+a+a>b$,... обязательно выполнено. В дальнейшем, говоря об аксиоме Архимеда, мы

будем иметь в виду именно эту формулировку. Из нее видно, что в множестве действительных чисел (где эта аксиома выполняется) бесконечно малых нет: чтобы убедиться в этом, достаточно положить $a=\varepsilon$, $b=1$. Понятно, что на самом деле аксиома Архимеда равносильна утверждению об отсутствии бесконечно малых элементов, не равных нулю.

Вывод из всего сказанного таков: если мы хотим рассматривать бесконечно малые, мы должны расширить множество **R** действительных чисел до некоторого большего множества * **R**. Элементы этого нового множества мы будем называть гипердействительными числами. В нем аксиома Архимеда не выполняется и существуют бесконечно малые (в смысле последнего определения) числа, такие, что сколько их ни складывай с собой, сумма будет все время оставаться меньше 1. Подобно тому как обычный (или стандартный, или архимедов) математический анализ занимается изучением множества действительных чисел **R**, нестандартный, или неархимедов, анализ изучает множество гипердействительных чисел ***R**.

Какие требования естественно предъявлять к гипердействительным числам?

Прежде всего мы хотим, чтобы множество гипердействительных чисел содержало все обыкновенные действительные числа: $\mathbf{R}\subset{}^*\mathbf{R}$. Мы хотим также, чтобы над гипердействительными числами можно было выполнять обычные операции: любые два гипердействительные числа нужно уметь складывать, умножать, вычитать и делить, причем так, чтобы выполнялись обычные свойства сложения и умножения (например, $a+b$ должно равняться $b+a$ для любых гипердействительных чисел a и b). Кроме того, нужно уметь сравнивать гипердействительные числа по величине, т. е. уметь для любых различных гипердействительных чисел a и b решить, какое из них больше.

Все перечисленные требования можно кратко сформулировать так: ***R** должно быть неархимедовым упорядоченным полем, являющимся расширением поля **R**. Поясним слова, входящие в последнюю фразу.

Пусть имеется некоторое множество P, в нем выделены некоторые элементы 0 и 1 и определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, ставящие в соответствие любым двум элементам a и b множества P их *сумму* $a+b$, *произведение* $a\cdot b$, *разность* $a-b$ и (если $b\neq0$)

частное a/b. Пусть при этом перечисленные операции обладают всеми обычными свойствами. Именно пусть

(1) $a+b=b+a$;
(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$;
(3) $a+0=a$;
(4) $a+(b-a)=b$;
(5) $a\cdot b=b\cdot a$;
(6) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;
(7) $a\cdot 1=a$;
(8) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;
(9) $a\cdot(b/a)=b$ (если $a\neq 0$).

В таком случае множество P (с введенными операциями) называется *полем*. (Если не требовать наличия деления и исключить связанное с ним свойство (9), мы приходим к понятию кольца, точнее, *коммутативного кольца с единицей*.)

Пусть на поле P введен порядок, т. е. для любой пары не равных друг другу элементов a и b определено, который из них больше. (Если a больше b, мы будем писать $a>b$ или $b<a$.) Пусть при этом выполняются такие свойства:

(10) если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$;
(11) если $a<b$, то $a+c<b+c$ для любого c;
(12) если $a<b$, $c>0$, то $a\cdot c<b\cdot c$;
если $a<b$, $c<0$, то $a\cdot c>b\cdot c$.

В таком случае говорят, что введенный порядок превращает P в *упорядоченное поле*.

Если заданный на поле P порядок удовлетворяет аксиоме Архимеда, т. е. для любых a, $b\in P$, для которых $0<a<b$, выполняется одно из неравенств $a+a>b$, $a+a+a>b, \ldots$, то упорядоченное поле P называется архимедовым; в противном случае поле P называется неархимедовым. Как уже упоминалось, упорядоченное поле P является неархимедовым тогда и только тогда, когда в нем есть положительные бесконечно малые элементы. Напомним, что элемент $\varepsilon>0$ упорядоченного поля называется бесконечно малым, если любая из сумм $\varepsilon+\varepsilon$, $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon, \ldots$ не превосходит 1. Наконец, упорядоченное поле P называется расширением поля действительных чисел $\mathbf{R}$, если P содержит все действительные числа (т. е. $\mathbf{R}\subset P$) и, кроме того, операции и порядок из P, рассматриваемые на элементах из $\mathbf{R}$, совпадают с обычными арифметическими операциями и обычным порядком на действительных числах.

Итак, напоминаем, мы желаем рассматривать бесконечно малые величины, а для этого хотим построить неархимедово упорядоченное поле, являющееся расширением поля **R** действительных чисел.

Этим не ограничиваются требования, предъявляемые нами (вслед за Абрахамом Робинсоном) к гипердействительной числовой системе. Но прежде чем говорить о других требованиях, покажем, каким образом можно удовлетворить хотя бы уже сформулированным требованиям.

§ 3. ПРИМЕР НЕАРХИМЕДОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ

Мы хотим построить пример числовой системы, удовлетворяющей упомянутым в § 1 требованиям к гипердействительным числам. Точнее, мы хотим построить пример неархимедова упорядоченного поля, являющегося расширением поля действительных чисел.

Начнем с анализа: предположим, что искомое расширение $^*\mathbf{R}$ уже построено, и исследуем его строение. Элементы множества $^*\mathbf{R}$ мы будем называть гипердействительными числами. Среди них, в частности, содержатся и все действительные числа. Чтобы отличить их от тех гипердействительных чисел, которые не являются действительными, будем называть действительные числа (элементы **R**) *стандартными*, а остальные гипердействительные числа (элементы $^*\mathbf{R}/\mathbf{R}$) — *нестандартными*.

По нашему предположению, поле $^*\mathbf{R}$ содержит бесконечно малые числа, не равные нулю. Поскольку раньше мы говорили о бесконечной малости в разных смыслах (причем только для положительных чисел), приведем точное определение бесконечной малости. Гипердействительное число x называется бесконечно малым, если все суммы

$$|x|+|x|,\ |x|+|x|+|x|,\ |x|+|x|+|x|+|x| \text{ и т. д.}$$

меньше 1. Здесь через $|x|$ обозначен модуль гипердействительного числа x, определяемый так:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Отметим, что стандартное число 0 также оказывается, согласно этому определению, бесконечно малым. Но все

остальные (отличные от нуля) бесконечно малые числа не могут быть стандартными. Это следует из того, что для стандартных чисел справедлива аксиома Архимеда.

Попытаемся разобраться в устройстве системы гипердействительных чисел более подробно. Нетрудно видеть, что любое положительное бесконечно малое число ε меньше любого стандартного положительного числа a. Покажем это. В самом деле, пусть $\varepsilon \geqslant a$. Так как a стандартно, то можно найти такое натуральное число n, что

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ раз}} \geqslant 1.$$

Но тогда

$$\underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\cdots+\varepsilon}_{n\text{ раз}} \geqslant \underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ раз}} \geqslant 1,$$

что противоречит бесконечной малости ε. Полученное противоречие показывает, что $\varepsilon < a$. Итак, бесконечно малые положительные числа меньше любого из стандартных положительных чисел.

Наряду с бесконечно малыми в поле $^*\mathbf{R}$ существуют и бесконечно большие. Мы называем гипердействительное число A бесконечно большим, если

$$|A|>1, \quad |A|>1+1, \quad |A|>1+1+1 \text{ и т. д.}$$

Легко доказать (по существу, мы это сделали в § 1), что если ε бесконечно мало, но отлично от нуля, то число $A=1/\varepsilon$ бесконечно велико. (Оговорка «отлично от нуля» важна, ведь a/b определено (согласно определению поля) только при $b \neq 0$; в нестандартном анализе, как и в стандартном, на нуль делить нельзя!) Верно и обратное: если число A бесконечно велико, то число $\varepsilon=1/A$ бесконечно мало. Отсюда следует, что *все бесконечно большие числа нестандартны*: если бы бесконечно большое число A было стандартным, то число $1/A$ было бы бесконечно малым стандартным и не равным нулю числом, что невозможно. Более того, нетрудно доказать, что любое положительное бесконечно большое число больше всех стандартных, а любое отрицательное — меньше.

Гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, называются *конечными*. Равносильное определение: гипердействительное число a конечно, если $|a|<t$ для некоторого стандартного числа t. В результате получаем такую картину (рис. 6).

0

Отрицательные бесконечно большие гипердействительные числа | Конечные гипердействительные числа (стандартные и нестандартные) | Положительные бесконечно большие гипердействительные числа

Рис. 6

Поговорим теперь о строении конечных гипердействительных чисел более подробно.

Оказывается, что каждое конечное гипердействительное число a можно представить в виде $b+\varepsilon$, где b — стандартное число, а ε — бесконечно малое. (Дадим набросок доказательства. Пусть a — конечное гипердействительное число. Разобьем действительные числа на два класса: меньшие a и большие a. Так как a конечно, то оба класса непусты. По «аксиоме полноты» существует действительное число b, разделяющее эти классы. Легко видеть, что $\varepsilon = a-b$ будет бесконечно малым гипердействительным числом.) Число b называется стандартной частью конечного гипердействительного числа a. Обозначается это так: $b=\mathrm{st}(a)$. Таким образом, множество конечных гипердействительных чисел разбивается на классы. В каждый класс входит какое-то стандартное число b и все бесконечно близкие к нему. (Числа x и y *бесконечно близки*, если $y-x$ бесконечно мало.) Эти классы называются (из уважения к Лейбницу) *монадами*: монадой стандартного числа b называется множество всех бесконечно близких к нему гипердействительных чисел.

Среди бесконечно малых величин имеются величины различных «порядков малости». Ясно, например, что ε^2 — величина более высокого порядка малости, чем ε (а ε^3 — еще более высокого, чем ε^2). Точное определение таково: бесконечно малое число δ имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малое ε, если их отношение δ/ε бесконечно мало.

Обсудив структуру нестандартного «микромира», скажем несколько слов и о строении нестандартного «макромира» (мира бесконечно больших гипердействительных чисел). Их можно разбить на классы («галактики»), каждый из которых устроен, подобно множеству всех конечных гипердействительных чисел («нашей Галактике»). Именно два гипердействительных числа a и b попадают в одну галакти-

ку, если их разность $b—a$ является конечным действительным числом. Каждая галактика, как мы видели, разбивается на монады: два числа a и b относятся к одной монаде, если $b—a$ бесконечно мало.

Среди галактик нет ни самой большой, ни самой малой; между любыми двумя галактиками есть бесконечно много других галактик. (Эти факты доказываются сравнительно несложно, и мы не будем приводить их доказательств.) В дальнейшем мы докажем аналогичные утверждения, относящиеся к так называемым «бесконечно большим натуральным числам».

Перейдем теперь к построению примера системы гипердействительных чисел, удовлетворяющей высказанным требованиям, или, более точно, примера неархимедова упорядоченного поля, являющегося расширением поля действительных чисел. Это расширение будет в определенном смысле минимальным: мы добавим к действительным числам только то, чего нельзя не добавить.

Прежде всего нужно добавить к ним какое-нибудь бесконечно малое число ε. Будем считать (это потребуется нам в дальнейшем), что число ε положительно. Добавив ε, нам придется добавить и 2ε, 3ε, $\varepsilon/2$ и вообще все числа вида $a\varepsilon$, где a — любое стандартное число, ведь мы хотим, чтобы в $^*\mathbf{R}$ было определено умножение! Но и этого мало: нужно добавить и степени числа ε и их комбинации. Таким образом, в нашем поле оказываются все числа вида $Q(\varepsilon)$, где Q — многочлен с действительными коэффициентами (стандартными), а значит, и все частные вида $Q(\varepsilon)/T(\varepsilon)$, где Q и T — многочлены с действительными коэффициентами. Порядок на множестве таких частных однозначно определяется условием бесконечной малости числа ε. Поясним это на примере. Пусть мы хотим сравнить числа

$$\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \text{ и } \frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2},$$

или, другими словами, сравнить их разность $\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon} - \frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$ с нулем. Вычисляя эту разность по обычным правилам, получаем

$$\frac{(1+\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)-((1+\varepsilon)(2+\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)} = \frac{-2\varepsilon+3\varepsilon^2-\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}.$$

Видно, что интересующая нас разность отрицательна, так как -2ε отрицательно, и члены более высокого порядка ($3\varepsilon^2$ и ε^3) не могут повлиять на знак суммы. Значит, первое число меньше второго.

После всего сказанного ясно, как нужно строить интересующий нас пример неархимедова расширения поля действительных чисел. Именно, нужно взять символ ε и рассмотреть формальные выражения вида

$$Q(\varepsilon)/T(\varepsilon),$$

где Q и T — многочлены с действительными коэффициентами. Сумма и произведение таких формальных выражений определяются естественным образом. (Это обычная в алгебре конструкция поля рациональных функций с коэффициентами из $\mathbf{R}$.) Осталось только определить, когда одно формальное выражение a указанного вида больше другого выражения b того же вида, или, другими словами, когда их разность $a-b$ положительна. Это делается так. Знак выражения $Q(\varepsilon)/T(\varepsilon)$ определяется знаками выражений $Q(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ по обычным правилам, а знак выражения

$$Q(\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots+a_n\varepsilon^n$$

совпадает со знаком a_0, если $a_0\neq 0$; если $a_0=0$, то знак $Q(\varepsilon)$ совпадает со знаком a_1 (если $a_1\neq 0$); если $a_0=a_1=0$, то со знаком a_2 и т. д.

Нетрудно проверить, что описанная конструкция на самом деле приводит к цели — построению неархимедова расширения поля действительных чисел. На этом примере можно проиллюстрировать введенные нами понятия. Дробь

$$\frac{a_0+a_1\varepsilon+\ldots+a_n\varepsilon^n}{b_0+b_1\varepsilon+\ldots+b_k\varepsilon^k}$$

будет бесконечно малой, если первый ненулевой коэффициент a_t в числителе расположен правее, чем первый ненулевой коэффициент b_s в знаменателе, т. е. если $t>s$. Если $t<s$, то она будет бесконечно большой. Если же $t=s$, то дробь будет конечным гипердействительным числом: его стандартная часть равна a_t/b_s. Например,

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \frac{\varepsilon^2+2\varepsilon^3}{1+\varepsilon} \text{ — бесконечно малые,}$$

$$\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2+2\varepsilon^3} \text{ — бесконечно большие,}$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon},\ \frac{\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3}{2\varepsilon+4\varepsilon^4} \text{ — конечные гипердействительные числа}$$

(стандартная часть первого равна 1, второго — $^1/_2$):

§ 4. ЧТО ЕЩЕ НУЖНО ОТ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ?

Изложенная в § 3 простая конструкция неархимедова расширения была, разумеется, известна задолго до создания нестандартного анализа. Чтобы понять, чего в ней не хватает, посмотрим на примеры из § 1 с точки зрения этой конструкции. Пример 1 становится вполне корректным: нужно сказать лишь, что производной функции $y=x^2$ в стандартной точке x называется стандартная часть отношения dy/dx. К сожалению, уже про пример 2 этого сказать нельзя. Дело в том, что при вычислении приращения $dy=\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}$ нужно извлекать квадратный корень из гипердействительного числа $x+dx$. А этого мы делать не умеем. (Нетрудно доказать, что в построенном нами расширении попросту нет элемента, квадрат которого равен, например, ε.) Еще хуже обстоят дела с третьим примером. В нем нужно вычислить значение *произвольной* функции f (определенной изначально только в стандартных точках) в гипердействительных точках $a+dx$, $a+2dx$ и т. д. Конечно, ее можно как-то доопределить в нестандартных точках, но если мы хотим получить что-то разумное, то нужно, чтобы доопределенная функция обладала теми же свойствами, что и исходная. А как это сделать, непонятно (особенно если учесть, что функция f может быть произвольной с действительными аргументами и значениями).

Возникающая ситуация оказывается достаточно общей для того, чтобы можно было применять методы математической логики. Требуемая теорема, а именно так называемая «теорема компактности» была доказана советским математиком А. И. Мальцевым в 1936 г. Построение поля гипердействительных чисел с помощью этой теоремы обсуждается в § 5. Другой способ построения поля гипердействительных чисел (также заимствованный из математической логики) рассматривается в § 6. А пока мы постараемся объяснить, что получается в результате любого из этих построений.

Прежде всего мы получаем неархимедово расширение поля действительных чисел. Кроме того, «каждому объекту стандартного мира» (действительному числу, множеству действительных чисел, функции с действительными аргументами и значениями, операции и т. д.) поставлен в со-

ответствие его аналог в «нестандартном мире». Именно нестандартным аналогом любого (стандартного) действительного числа является оно само (напомним, что **R** есть подмножество множества ***R**); любому подмножеству A множества **R** соответствует некоторое подмножество $^*A$ множества ***R**, каждой функции f из **R** в **R** соответствует функция $^*f$ из ***R** в ***R**, каждой двуместной функции g из **R** в **R** (т. е. функции из **R**×**R** в **R**) соответствует двуместная функция $^*g$ из ***R** в ***R** (т. е. функция из ***R**×***R** в ***R**) и т. д. Разумеется, эти аналоги $^*A$, $^*f$, $^*g$ не произвольны, а должны обладать некоторыми специальными свойствами: так, $^*A \cap \mathbf{R} = A$, на (стандартных) действительных числах f и $^*f$ совпадают (а g и $^*g$ совпадают на парах действительных чисел), так что $^*f$ является продолжением для f, а $^*g$ — продолжением для g (они называются *естественными продолжениями* соответствующих функций). При этом оказывается выполненным так называемый *принцип переноса*, утверждающий, грубо говоря, что гипердействительные аналоги стандартных объектов обладают теми же самыми свойствами, что и исходные стандартные объекты. Более точная формулировка принципа переноса дается в § 5. В настоящем параграфе мы проиллюстрируем применение этого принципа на нескольких примерах.

Пример 1. Функция f, определенная формулой $f(x)=2^x$, является монотонно возрастающей. Ее аналог $^*f$, функция с гипердействительными аргументами и значениями, согласно принципу переноса, также будет монотонно возрастающей функцией, продолжающей исходную (т. е. совпадающей с ней в стандартных точках). Множество значений функции f совпадает с множеством положительных действительных чисел. Поэтому согласно принципу переноса множеством значений функции $^*f$ будет множество всех положительных гипердействительных чисел.

Пример 2. Рассмотрим множество **N** всех натуральных чисел. Ему соответствует некоторое множество ***N** гипердействительных чисел. Это множество естественно назвать *гипернатуральным рядом*, а его элементы — *гипернатуральными числами*. Гипернатуральный ряд содержит все натуральные числа, но не исчерпывается ими. Натуральные числа естественно назвать *стандартными* элементами гипернатурального ряда. Остальные (ненатуральные) его элементы естественно назвать *нестандартными* гипернатуральными числами. Чтобы получить гипер-

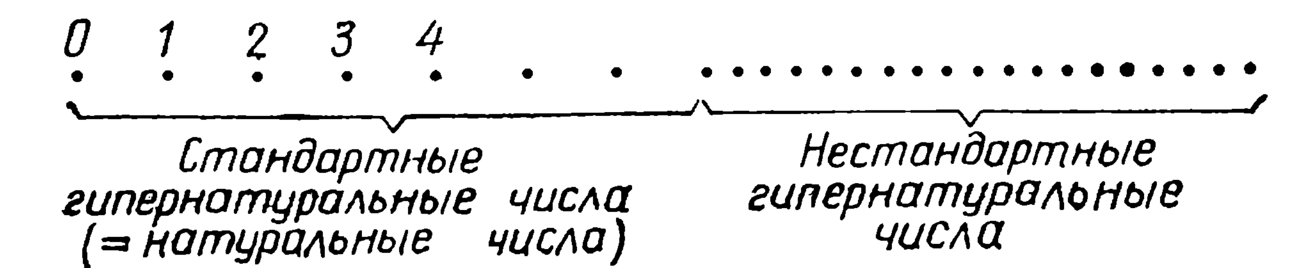


Рис. 7

натуральное число, можно взять любое положительное бесконечно большое гипердействительное число A и рассмотреть его целую часть $[A]$. (Более точно, нужно рассмотреть нестандартный аналог функции взятия целой части, переводящей x в $[x]$, и применить его к гипердействительному числу A.)

Рассмотрим подробнее устройство (надо сказать, довольно экзотическое) гипернатурального ряда. Как уже говорилось, гипернатуральные числа делятся на стандартные и нестандартные. Все нестандартные натуральные числа бесконечно велики. В самом деле, пусть A — некоторое нестандартное натуральное число. Докажем, что оно больше произвольного стандартного действительного числа B. Пусть, например, $B=1983{,}27$. Имеет место такое утверждение: «всякое натуральное число, меньшее B, равно либо 0, либо 1, либо 2, ..., либо 1983». Согласно принципу переноса должно быть справедливо и такое утверждение: «всякое гипернатуральное число, меньшее B, равно либо 0, либо 1, либо 2, ..., либо 1983». А поскольку числа 0, 1, 2, ..., 1983 стандартны, то всякое нестандартное гипернатуральное число должно быть больше B (рис. 7).

В гипернатуральном ряду нет наибольшего элемента (за каждым элементом a имеется следующий элемент $a+1$). Чуть менее очевидно, что среди нестандартных натуральных чисел нет наименьшего. Простое доказательство этого факта хорошо иллюстрирует методы нестандартного анализа. Вот оно. Имеет место такое свойство (обычного) натурального ряда: для всякого натурального числа, отличного от нуля, существует непосредственно предшествующее ему натуральное число. Согласно принципу переноса гипернатуральный ряд также обладает этим свойством. Значит, у всякого гипернатурального числа a есть предшественник b. Докажем, что это предшественник нестандартен. Предположим, что это не так и b стандартно. Тогда b является предшественником числа $b+1$ в стандартном натуральном ряду. Значит (по принципу переноса), b является предшественником числа $b+1$ и в гипернату-

ральном ряду. Но тогда число b является предшественником двух различных чисел (а именно стандартного числа $b+1$ и нестандартного числа a), что невозможно (ни в стандартном натуральном ряду, ни, следовательно, в гипернатуральном ряду). Полученное противоречие показывает, что b нестандартно. Таким образом, мы доказали, что среди нестандартных гипернатуральных чисел нет наименьшего.

Чуть более детальный анализ позволяет получить следующие результаты, которые мы сообщим без доказательства. (Их доказательство можно найти на с. 66—68 книги М. Девиса [3].) Все нестандартные гипернатуральные числа разбиваются на классы. К одному классу относятся те числа, разница между которыми конечна. Эти классы можно назвать «галактиками», более подробно — «галактиками в мире $^*\mathbf{N}$». Термин «галактика» уже использовался нами в § 3 при обсуждении структуры поля $^*\mathbf{R}$; тогда мы наблюдали галактики в мире $^*\mathbf{R}$. Каждая галактика в $^*\mathbf{N}$ является пересечением с $^*\mathbf{N}$ одной из галактик в $^*\mathbf{R}$. В дальнейшем, говоря о галактиках, мы будем иметь в виду галактики в $^*\mathbf{N}$, если не оговорено противное. Каждая галактика устроена, подобно множеству $\mathbf{Z}$ целых чисел (т. е. изоморфна $\mathbf{Z}$ как упорядоченное множество). Для любых двух различных галактик K_1 и K_2 возможно одно из двух: либо любой элемент галактики K_1 меньше любого элемента галактики K_2 (в этом случае можно сказать, что K_1 меньше K_2, и писать $K_1<K_2$), либо, наоборот, любой элемент галактики K_2 меньше любого элемента галактики K_1 (в этом случае K_2 меньше K_1; запись $K_2<K_1$). Галактик, на которые распадается множество нестандартных гипернатуральных чисел, бесконечно много. Среди них нет ни наибольшей, ни наименьшей (для любой галактики K_1 можно найти большую галактику K_2 и меньшую галактику K_3). Множество галактик является плотным упорядоченным множеством; это означает, что для любых галактик K_1 и K_2, для которых $K_1<K_2$, существует галактика K_3, для которой $K_1<K_3<K_2$.

Приведем идею доказательства некоторых из сформулированных утверждений. Наибольшей и наименьшей галактик нет, так как для любого нестандартного гипернатурального числа a есть много большее его число $2a$ и много меньшее его число $[a/2]$ (целая часть половины a). Между любыми двумя галактиками имеется третья, так как для

любых чисел a и b, попавших в разные галактики, число $[(a+b)/2]$ попадает в промежуточную галактику.

Для знатоков все сказанное можно коротко выразить так: гипернатуральный ряд как упорядоченное множество изоморфен множеству $\mathbf{N}+\mathbf{Z}\times P$, где P — некоторое плотно упорядоченное множество без первого и последнего элемента.

Покажем теперь, как принцип переноса позволяет обосновать примеры из § 1. Первый пример мы обсудили в начале § 4. Во втором рассматривается функция извлечения корня и ее гипердействительное продолжение. Мы пользуемся равенством $(\sqrt{x})^2=x$ и $(\sqrt{x+dx})^2=x+dx$; первое из них представляет собой стандартное (во всех отношениях) определение квадратного корня, второе получается по принципу переноса. (Раз тождество $(\sqrt{t})^2=t$ верно в $\mathbf{R}$, оно обязано быть верным в $^*\mathbf{R}$.)

В третьем примере (определение интеграла) стандартная функция f продолжается до $^*f$, после этого выражения $f(a+dx)$, $f(a+2dx),\ldots$, $f(a+(H-1)dx)$ приобретают смысл. Нужно только объяснить, что такое сумма бесконечно большого числа слагаемых (именно H слагаемых). Это делается с помощью такого приема. Определим (в обычном «стандартном» мире) функцию

$$S(n, dx)=[f(a)+f(a+dx)+\ldots+f(a+(n-1)dx)]dx.$$

Ее аргументы являются натуральными и действительными числами. Соответствующий нестандартный аналог представляет собой функцию $^*S$, аргументы которой являются соответственно гипернатуральными и гипердействительными числами. Подставив в нее H и $dx=(b-a)/H$, получим гипердействительное число $^*S(H, dx)$, стандартную часть которого мы и называем интегралом (стандартной) функции f по (стандартному) отрезку $[a, b]$.

На уровне интуиции наши возражения против четвертого примера сводились к тому, что неясно, где мы использовали компактность области определения функции. Напомним, что этот пример, так же как и следующие, был адресован знатокам, и поэтому их обсуждение также может быть пропущено без ущерба для дальнейшего. С целью прояснения ситуации попробуем применить наши рассуждения, скажем, к функции $1/x$ на интервале $]0,1[$. Оказывается, что f не непрерывна на $]0,1[$, если рассматривать этот интервал как интервал гипердействительной прямой

${}^*\mathbf{R}$; в самом деле, эта функция не непрерывна в любой точке α, удовлетворяющей условиям $\alpha\approx0$, $\alpha\neq0$, ведь не для всякого x выполняется утверждение $x\approx\alpha\Rightarrow1/x\approx1/\alpha$ (достаточно взять $x=\alpha/2$).

Наш пятый пример — пример неизмеримого множества — становится также вполне ясным. В нем мы должны рассмотреть функцию $z(n, x)=(n$-й знак двоичного разложения числа $x)$. Это — функция из множества $\mathbf{N}\times\mathbf{R}$ со значениями в $\{0, 1\}$. Ее гипердействительный аналог есть функция ${}^*z$ из ${}^*\mathbf{N}\times{}^*\mathbf{R}$ со значениями также в $\{0, 1\}$. Выберем теперь бесконечно большое гипернатуральное число H и рассмотрим те стандартные числа $x\in[0,1]$, для которых ${}^*z(H, x)=0$. Это множество (стандартных) действительных чисел и будет неизмеримым по Лебегу. (Это, конечно, нужно еще доказать, но доказательство несложное: оно основывается, грубо говоря, на том, что любой интервал заполняется этим множеством наполовину.)

Шестой пример (принадлежащий Эйлеру) подробно разбирается на с. 64—65 статьи Люксембурга [36]. Там разъясняется, как ход рассуждений Эйлера становится корректным (с современной точки зрения) в свете нестандартного анализа.

В заключение приведем еще два примера «нестандартных» определений стандартных понятий (именно понятия предела последовательности и понятия предельной точки последовательности).

Пусть x_n — последовательность (стандартных) действительных чисел, или, другими словами, функция из $\mathbf{N}$ в $\mathbf{R}$. Ее нестандартный аналог представляет собой функцию из ${}^*\mathbf{N}$ в ${}^*\mathbf{R}$; значение этой функции на гипернатуральном числе m естественно обозначать x_m.

Определение предела. Стандартное число a называется пределом последовательности x_n, если *все* бесконечно далекие члены этой последовательности бесконечно близки к a, т. е. *для всякого* нестандартного гипернатурального числа m разность x_m-a бесконечно мала.

Определение предельной точки. Стандартное число a называется предельной точкой последовательности x_n, если *некоторые* бесконечно далекие члены последовательности бесконечно близки к a, т. е. *существует* такое нестандартное гипернатуральное число m, что разность x_m-a бесконечно мала.

§ 5. ЕЩЕ О ПРИНЦИПЕ ПЕРЕНОСА

Быть может, у читателя возник следующий вопрос. Принцип переноса утверждает, что гипердействительные числа обладают теми же самыми свойствами, что и стандартные действительные числа. Но стандартные числа удовлетворяют аксиоме Архимеда, а гипердействительные нет. Не противоречит ли это принципу переноса?

Вот что пишет по этому поводу Мартин Девис на с. 26 «Прикладного нестандартного анализа» [3]:

«Лейбниц постулировал существование системы чисел, имеющей те же свойства, что и обычные числа, но содержащей бесконечно малые. ...Однако позиция Лейбница кажется, очевидно, абсурдной. Обычные действительные числа, конечно же, имеют по крайней мере одно свойство, которым не обладает желаемое Лейбницем расширение. А именно, среди действительных чисел нет бесконечно малых.

Парадокс устраняется точным выбором формального языка в терминах современной логики (столь же жестко определенного, как и языки программирования для ЭВМ). Таким образом, принцип Лейбница уточняется: существует расширение действительных чисел, содержащее бесконечно малые элементы и имеющее те же свойства, что и действительные числа, поскольку эти свойства могут быть выражены в точно указанном формальном языке. Отсюда заключаем, что свойство быть бесконечно малым не может быть выражено указанным способом».

Формальный язык, о котором идет речь в приведенной цитате, относится к числу так называемых «языков первого порядка», широко используемых в математической логике. Этот язык мы обозначим сочетанием букв RL и рассмотрим его подробнее в § 8. А пока приведем в качестве примеров несколько выражений языка RL (или, как говорят, *формул* языка RL).

Формула $\forall x \forall y\ (x+y=y+x)$ читается: «для всякого x и всякого y сумма $x+y$ равна сумме $y+x$» и выражает коммутативность сложения.

Формула $\forall x \forall y \forall z (((x \cdot y \cdot z=0) \wedge \neg (x=0)) \Rightarrow ((y=0) \vee (z=0)))$ читается: «для всякого x, всякого y и всякого z, если произведение $x \cdot y \cdot z$ равно 0 и если x не равно 0, то y равно 0 или z равно 0».

Формула $\forall x \forall y (\sin(x+y)=\sin x \cdot \cos y+\cos x \cdot \sin y)$ выражает справедливость обычной формулы для синуса суммы.

Формула $\forall x \exists y((x+y)=0)$ читается: «для всякого x существует такое y, что $x+y$ равно 0», и выражает утверждение о существовании противоположного элемента.

Как видно из этих примеров, формулы языка RL могут содержать переменные (x, y и т. д.), обозначения для всевозможных функций ($+$, $\sin$, $\cos$ и т. д.) и отношений ($=$, $>$ и т. д.), а также логические связки $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\Rightarrow$ (если ..., то), $\neg$ (не), кванторы $\forall$ (для всякого) и $\exists$ (существует).

Мы не будем пока приводить точного определения понятия формулы рассматриваемого языка RL, ограничившись уже приведенными разъяснениями. Отметим еще, что в языке RL бесконечно много символов — мы считаем, что для каждой функции с действительными аргументами и значениями и для каждого отношения между действительными числами имеется специальный символ.

Формулы языка RL имеют стандартную интерпретацию, в которой возможными значениями переменных являются действительные числа, а символы для функций и отношений выражают те самые функции и отношения, для обозначения которых они введены. При этой стандартной интерпретации некоторые формулы оказываются истинными, а некоторые — ложными. (Все четыре формулы, приведенные выше в качестве примеров, — истинные.)

Применение упоминавшейся в предыдущем параграфе теоремы компактности Мальцева позволяет получить интерпретацию языка RL, в которой истинны те же формулы, что и в его стандартной интерпретации, но в которой не выполнена аксиома Архимеда. (Такую интерпретацию можно назвать нестандартной.) Более подробно, мы получаем некоторое множество $^*\mathbf{R}$ и некоторые функции и отношения на нем, сопоставленные с символами нашего языка. При этом оказывается, что если считать возможными значениями переменных элементы $^*\mathbf{R}$, а значениями символов нашего языка — соответствующие функции и отношения на $^*\mathbf{R}$, то истинными будут те же самые формулы, что и при стандартной интерпретации.

Это не мешает аксиоме Архимеда быть истинной в стандартной интерпретации и ложной в нестандартной. Дело в том, что эта аксиома не может быть записана в виде формулы рассматриваемого языка RL. Это не удивительно: попытка записать аксиому Архимеда на этом языке естественным способом приводит к неудаче; хочется написать

$$\forall \varepsilon(\varepsilon>0 \Rightarrow [\varepsilon>1 \text{ или } \varepsilon+\varepsilon>1 \text{ или } \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon>1 \ldots]),$$

но ведь каждая формула обязана иметь конечную длину, и потому никакой конкретной формулы не получается.

Возникающее явление часто встречается в логике и называется элементарной эквивалентностью неизоморфных структур. Простейшим примером такой ситуации являются множества **Q** и **R** (рациональных и вещественных чисел) как упорядоченные множества. Они не изоморфны. Однако если интересоваться формулами языка, содержащего лишь отношения ($<$, $=$), а также переменные и логические знаки, то обнаружится, что в **Q** и **R** истинны одни и те же формулы. Аналогичное утверждение можно сделать и относительно упорядоченных множеств **N** и **N**+**Z** (через **N**+**Z** обозначено упорядоченное множество, являющееся объединением двух подмножеств, причем первое из них изоморфно **N**, второе изоморфно **Z** и все элементы первого меньше всех элементов второго).

§ 6. ЧТО ЖЕ ТАКОЕ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО?

Мы уже так много говорили о гипердействительных числах, что возникает вопрос: что же все-таки представляет собой гипердействительное число? Другими словами, как построить расширение поля **R** с нужными нам свойствами?

К сожалению, попытка ответить на этот вопрос встречается с принципиальными трудностями. Дело в том, что в отличие от **N**, **Z**, **Q** и **R** множество гипердействительных чисел ***R** неединственно — в том смысле, что существует много различных упорядоченных полей ***R**, обладающих нужными нам качествами, и не видно никакого способа выбрать какое-нибудь из них в качестве наилучшего, или «истинного», упорядоченного поля гипердействительных чисел.

Существование множества ***R**, как уже упоминалось, может быть обосновано двумя способами. Первый способ состоит в применении одной из основных теорем математической логики, называемой теоремой компактности для исчисления предикатов первого порядка. Эта теорема гарантирует в определенных ситуациях существование так называемых моделей, т. е. математических структур, удовлетворяющих заданным аксиомам. Этот способ обсуждается в § 8.

Второй способ состоит в прямой (хотя также принципиально неоднозначной) конструкции. Получение этим способом $^*\mathbf{R}$ из $\mathbf{R}$ в какой-то мере аналогично получению каждого из множеств цепочки $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ из предыдущего. (Впрочем, эта аналогия носит, быть может, несколько поверхностный характер.) В самом деле, целое число можно рассматривать как класс эквивалентных пар натуральных чисел, рациональное — как класс эквивалентных пар целых чисел, действительное — как класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел (такие последовательности называют также последовательностями Коши).

Подобно этому гипердействительные числа можно рассматривать как классы последовательностей обыкновенных действительных чисел. Объясним более подробно, как это делается.

Первая попытка состоит в том, чтобы назвать гипердействительным числом произвольную последовательность действительных чисел. При этом можно надеяться, что последовательность 1,2,3,4,... окажется бесконечно большим гипердействительным числом, а последовательность $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\right.$ ... — бесконечно малым. Ясно также, что складывать и умножать последовательности нужно, по-видимому, почленно. При этом роль нуля играет последовательность 0,0,0,..., а роль единицы — последовательность 1,1,... Однако ничего хорошего пока не получается. Например, свойство действительных чисел «если произведение равно нулю, то один из сомножителей равен нулю» для последовательностей не выполнено, например: произведение последовательностей 0,1,0,1,... и 1,0,1,0,... равно «нулю» (т. е. последовательности 0,0,...), хотя ни одна из них не равна нулю. При определении порядка на последовательностях также возникают трудности. Хочется сказать, что последовательность $a=a_0, a_1,\ldots$ меньше последовательности $b=b_0, b_1,\ldots$, если $a_i<b_i$ при всех i. Однако определенный таким образом порядок не обладает свойством линейности: найдутся такие различные последовательности a и b, что оба утверждения $a<b$ и $b<a$ ложны.

Выход из положения состоит в том, чтобы считать гипердействительными числами не просто последовательности, а некоторые классы последовательностей. Эта конструкция довольно часто встречается: например, действительные числа иногда определяются как некоторые классы после-

довательностей рациональных чисел. Более изощренный пример для знатоков: элементами пространства $\mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ служат не просто интегрируемые по Лебегу функции на $\mathbf{R}$, а классы эквивалентности таких функций по отношению «отличаться на множестве меры 0». Необычным в нашем случае будет именно способ построения классов. Его определение будет использовать так называемый нетривиальный ультрафильтр на множестве натуральных чисел. Объясним, что это такое.

Пусть некоторые множества натуральных чисел названы «большими», а некоторые — «малыми», причем выполнены следующие свойства:

1. Любое множество натуральных чисел является либо большим, либо малым. Ни одно множество не является малым и большим одновременно.

2. Дополнение (до $\mathbf{N}$) любого малого множества является большим, дополнение любого большого множества — малым.

3. Любое подмножество малого множества является малым, любое надмножество большого — большим.

4. Объединение двух малых множеств является малым, пересечение двух больших множеств — большим.

Элементами этого ультрафильтра называются множества, объявленные большими. Вот простой пример ультрафильтра: множества, содержащие данное натуральное число a, объявляются большими, а остальные — малыми. Такие ультрафильтры (при всех $a \in \mathbf{N}$) называют тривиальными. Используя свойства 1—4, можно доказать, что нетривиальность ультрафильтра равносильна выполнению такого свойства.

5. Всякое конечное множество является малым, всякое множество, имеющее конечное дополнение (до множества $\mathbf{N}$), — большим.

Вопрос о том, каким образом можно построить нетривиальный ультрафильтр, мы обсудим позже. А сейчас мы покажем, как с помощью такого ультрафильтра построить искомое неархимедово расширение поля действительных чисел.

Итак, пусть фиксирован нетривиальный ультрафильтр, т. е. некоторые множества натуральных чисел названы большими, некоторые — малыми и свойства 1—5 выполняются.

Будем говорить, что последовательности $a=a_0, a_1, a_2, \ldots$ и $b=b_0, b_1, b_2, \ldots$ эквивалентны, если равенство $a_i=b_i$

«выполнено почти при всех i», т. е. если множество тех i, при которых $a_i=b_i$, большое (тогда множество тех i, при которых $a_i \neq b_i$, — малое по свойству 2). Согласно свойству 5 любые последовательности, отличающиеся в конечном числе членов, эквивалентны. С каждой последовательностью сопоставим ее класс эквивалентности — класс всех эквивалентных ей последовательностей. Получающиеся классы эквивалентности и будут называться гипердействительными числами. Обыкновенные действительные числа вкладываются в множество гипердействительных чисел, если отождествить число $a \in \mathbf{R}$ с классом эквивалентности, содержащим последовательность $a, a, a, \ldots$ Таким образом, $^*\mathbf{R}$ оказывается, как мы того и хотели, расширением множества $\mathbf{R}$.

Определим сложение и умножение на гипердействительных числах (т. е. на классах эквивалентности). Пусть класс α содержит последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$, класс β — последовательность $b_0, b_1, b_2, \ldots$ Назовем суммой классов α и β класс, содержащий последовательность a_0+b_0, $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots$, а произведением—последовательность $a_0 \cdot b_0$, $a_1 \cdot b_1$, $a_2 \cdot b_2, \ldots$ Корректность этих определений (независимость от выбора элементов в классах α и β) обеспечивается свойством 4 из определения ультрафильтра.

Роль нуля в множестве $^*\mathbf{R}$ всех гипердействительных чисел исполняет, очевидно, класс, содержащий последовательность действительных чисел 0, 0, 0, 0, ...; напротив, гипердействительное число отлично от нуля, если оно (как класс эквивалентности) не содержит этой последовательности. Покажем, что мы преодолели упоминавшуюся выше трудность и что при нашем теперешнем определении произведение двух отличных от нуля гипердействительных чисел непременно само отлично от нуля. Итак пусть α и β — ненулевые (т. е. отличные от нуля) классы, a_0, a_1, $a_2, \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, \ldots$ — их элементы. Так как класс α ненулевой, то множество A, состоящее из тех i, для которых $a_i \neq 0$, — большое. Аналогично множество B, состоящее их тех i, при которых $b_i \neq 0$, — большое. Согласно свойству 4 из определения ультрафильтра пересечение $A \cap B$ является большим множеством. При $i \in A \cap B$ число $a_i \cdot b_i$ отлично от 0, поэтому последовательность $c_i=a_i \cdot b_i$ не эквивалентна нулевой последовательности.

Подобным же образом устраняется трудность с определением порядка на гипердействительных числах, т. е. с решением вопроса о том, какой из двух классов считать

бо́льшим, а какой — меньшим. Именно пусть α и β — два класса, а $a_0, a_1, a_2, \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, \ldots$ — их элементы. Посмотрим на множество тех i, при которых $a_i \geqslant b_i$. Если оно большое, то будем считать, что $\alpha \geqslant \beta$, если оно малое, то будем считать, что $\alpha < \beta$. Читатель легко проверит, что это определение корректно (т. е. не зависит от выбора представителей в классах).

Итак, мы ввели на множестве гипердействительных чисел сложение, умножение и порядок. Нетрудно проверить, что мы получили упорядоченное поле, т. е. что в множестве гипердействительных чисел выполняются все обычные свойства сложения, умножения и порядка. Аксиома Архимеда, однако, в этом поле не выполняется: последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ (точнее, содержащий ее класс) является, как можно проверить, бесконечно малым гипердействительным числом. Именно при этой проверке нам потребуется использовать нетривиальность ультрафильтра (свойство 5).

Что еще нужно уметь, чтобы выполнить обещанное? Напомним, что в § 4 мы обещали, что для каждого стандартного объекта (числа, множества чисел, функции и т. д.) будет существовать его нестандартный аналог. Смысл слова «аналог» был уточнен в § 5. Именно, должен выполняться принцип переноса, гарантирующий, что в множествах действительных и гипердействительных чисел являются истинными одни и те же формулы некоторого языка.

Итак, прежде всего нам надо уметь сопоставлять с каждым стандартным объектом (множеством действительных чисел, функцией с действительными аргументами и значениями и т. д.) его нестандартный аналог. Это делается следующим естественным способом. Пусть, например, A — некоторое множество (стандартных) действительных чисел. Определим его нестандартный аналог $^*A$. Пусть α — произвольное гипердействительное число (т. е. класс эквивалентных последовательностей), $a_0, a_1, \ldots$ — его представитель (т. е. одна из последовательностей этого класса). Будем писать, что $\alpha \in {}^*A$, если множество тех i, для которых $a_i \in A$, большое. Тем самым $^*A$ определено. Еще проще дело обстоит с продолжением функций действительного аргумента на гипердействительные числа. Пусть f — произвольная функция с действительными аргументами и значениями. Определим функцию $^*f$ с гипердействительными аргументами и значениями так: результатом ее при-

менения к последовательности $a_0, a_1, \ldots$ будет последовательность $f(a_0), f(a_1) \ldots$ (Строго говоря, нужно рассматривать не сами последовательности, а классы эквивалентности, но это не приводит ни к каким трудностям.) Если g — функция двух аргументов, то результат применения функции $^*g$ к последовательностям $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ есть последовательность $g(a_0, b_0), g(a_1, b_1), \ldots$

Читатель, возможно, уже обратил внимание на то, что наши определения операций сложения, умножения и порядка на множестве гипердействительных чисел как раз и были выполнены по этой схеме.

Чтобы довести дело до конца, нужно доказать, что для построенных нами объектов справедлив принцип переноса, т. е. что для них истинны те же формулы описанного в § 5 формального языка, что и для обычных действительных чисел. Это нетрудно сделать, но мы этого делать не будем, так как пришлось бы более подробно вдаваться в детали построения формального языка, что не входит в наши планы. Вместо этого мы обсудим уже упоминавшуюся нами проблему: откуда, собственно говоря, можно получить необходимый нам нетривиальный ультрафильтр на множестве натуральных чисел? Каким образом следует делить все подмножества множества **N** на «большие» и «малые», если мы хотим, чтобы выполнялись свойства 1—5?

К сожалению, никакого конкретного способа такого деления указать не удается. Можно лишь, используя так называемую аксиому выбора, доказать, что такие способы существуют. Поговорим об этой аксиоме и вообще об аксиомах теории множеств несколько подробнее.

§ 7. ОТСТУПЛЕНИЕ: ЗАЧЕМ НУЖНА АКСИОМА ВЫБОРА?

Детальное изложение системы аксиом теории множеств далеко выходит за рамки этой брошюры (отошлем читателя к гл. 1 из [1, часть II]). Скажем лишь, что в этой системе важную роль играют так называемые аксиомы существования, которые гарантируют существование некоторых множеств. Например, аксиома степени утверждает, что для любого множества X существует множество Y, состоящее из всех подмножеств множества X. Аксиома выделения утверждает, что для любого множества X и для любого

свойства $\varphi(x)$ его элементов существует множество Y, состоящее из тех и только тех элементов x множества X, которые обладают свойством $\varphi(x)$. Аксиома выбора также говорит о существовании некоторого множества. Она утверждает, что для любого семейства Σ попарно непересекающихся множеств существует множество C, содержащее ровно по одному элементу из каждого множества семейства Σ. Другими словами, в каждом множестве семейства Σ можно выбрать по одному «представителю» и образовать из этих представителей множество C.

Аксиома выбора имеет особенность, отличающую ее от других аксиом существования. Дело в том, что эти другие аксиомы (так называемые конструктивные аксиомы) утверждают существование некоторых однозначно определенных множеств. Очевидно, например, что для данного множества X есть только одно множество, являющееся множеством всех подмножеств множества X. Это множество обозначается $\mathcal{P}(X)$. Подобным образом существует лишь одно множество, образованное всеми элементами данного множества X, удовлетворяющими данному свойству $\varphi(x)$. Оно обычно обозначается так: $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$. Таким образом, аксиома степени и аксиома выделения (как и другие аксиомы теории множеств, за исключением аксиомы выбора), утверждая существование некоторых множеств, позволяют «назвать» эти множества, «дать им имена». В аксиоме выбора, напротив, множество C может быть выбрано по-разному. Поэтому все конструкции, использующие аксиому выбора, существенно неоднозначны. Эта неоднозначность не позволяет «дать имя» никакому множеству представителей, так как нет каких-либо способов решить, какому именно множеству представителей нужно его дать. Поясним сказанное. Представим себе, что один математик излагает другому некоторое рассуждение, использующее аксиому выбора. «Пусть Σ — некоторое семейство множеств. Рассмотрим множество C «представителей» множеств из Σ...» — говорит он. «Хорошо», — соглашается другой. Но при этом они имеют в виду, вообще говоря, разные множества представителей. И нет никаких средств, с помощью которых один из собеседников мог бы объяснить другому, какое именно множество представителей он имеет в виду.

При зарождении теории множеств в начале XX в. аксиома выбора (впервые эту аксиому явно сформулировал немецкий математик Э. Цермело, поэтому ее иногда называют аксиомой Цермело) вызвала у многих математиков

бурные протесты. Помимо уже упоминавшейся принципиальной неединственности построений, выполняемых с помощью аксиомы выбора, причиной этих протестов служили многочисленные парадоксальные ее следствия.

Приведем одно из таких следствий (парадокс Банаха — Тарского). Пусть дан шар D единичного радиуса (т. е. множество всех точек, отстоящих от данной точки на расстояния, не превосходящие 1). Оказывается, что шар D можно разбить на конечное число непересекающихся частей таким образом, что из этих частей можно составить два шара того же радиуса. Точнее, будем говорить, что множества $X_1, \ldots, X_n$ образуют разбиение множества P, если они являются подмножествами множества P и любая точка P принадлежит ровно одному из них. (Другими словами, это означает, что $X_1 \cup, \ldots, \cup X_n = P$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$.) Напомним также, что множества A и B точек (трехмерного) пространства называются *конгруэнтными*, если существует взаимно однозначное преобразование пространства, сохраняющее расстояния и переводящее A в B. Теперь результат Банаха — Тарского можно сформулировать так: существуют такое разбиение $A_1, \ldots, A_{12}$ шара D единичного радиуса и такие множества $B_1, \ldots, B_{12}$, что A_i конгруэнтно B_i при любом $i=1, 2, \ldots, 12$, множества $B_1, \ldots, B_6$ образуют разбиение некоторого шара D' единичного радиуса, а множества $B_7, \ldots, B_{12}$ также образуют разбиение некоторого шара D'' единичного радиуса. (Если в предыдущей фразе заменить «$B_1, \ldots, B_6$» на «$B_1, \ldots, B_7$», а «$B_7, \ldots, B_{12}$» на «$B_8, \ldots, B_{12}$», то получающееся утверждение также окажется справедливым.)

На первый взгляд кажется, что такого не бывает. Ведь объем шара D должен быть равен сумме объемов частей $A_1, \ldots, A_{12}$, или, что то же, сумме объемов частей $B_1, \ldots, B_{12}$. Но эта сумма равна удвоенному объему единичного шара! Дело, однако, в том, что некоторые из частей A_i и B_i устроены так сложно, что не имеют никакого объема. Это не означает, что их объем равен нулю, а означает, что говорить об их объеме бессмысленно. Как говорят, некоторые из множеств A_i и B_i неизмеримы. Доказательство существования неизмеримых множеств существенно опирается на аксиому выбора. Можно доказать, что без ее помощи построить неизмеримое множество (а точнее, доказать его существование) невозможно.

Аксиома выбора имеет и другие следствия, кажущиеся парадоксальными. Так нельзя ли от нее отказаться?

Может быть, она нужна только для построения «монстров» (подобных рассмотренному только что разбиению шара) и в обычной математической практике не применяется? К сожалению, это не так. Например, без использования аксиомы выбора нельзя доказать, что объединение счетного числа счетных множеств счетно. Без нее нельзя даже доказать, что множество действительных чисел невозможно представить в виде объединения счетного числа счетных множеств (см. [1, часть II, с. 39]), а ведь если бы такое представление было возможным, вся теория меры и интеграла (Лебега) оказалась разрушенной.

Укажем некоторые другие применения аксиомы выбора в математике, в частности в математическом анализе. Напомним определение непрерывности функции с действительными аргументами и значениями. В стандартных курсах приводятся два варианта такого определения. Первый из них — определение непрерывности по Коши — гласит следующее:

функция f с действительными аргументами и значениями называется непрерывной в точке a, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любого $x \in \mathbf{R}$, для которого $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Второе определение (по Гейне) гласит:

функция f с действительными аргументами и значениями называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности чисел $x_0, x_1, \ldots$, сходящейся к a, последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$ сходится к $f(a)$.

Несложное рассуждение, приводимое в большинстве курсов математического анализа, показывает, что эти определения эквивалентны. Мы не будем воспроизводить этого рассуждения здесь, но отметим, что, несмотря на свою простоту, оно существенно использует аксиому выбора. (Эта аксиома используется, когда мы, предположив, что функция не является непрерывной в смысле определения Коши, строим сходящуюся к a последовательность $x_0, x_1, \ldots$, такую, что полученная из нее последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$ не сходится к $f(a)$.) Можно доказать, что использование аксиомы выбора в этом рассуждении устранить нельзя.

Аналогичная ситуация имеет место с двумя определениями предельной точки множества (одно — через окрестности, другое — через последовательности): их эквивалентность нельзя доказать, не пользуясь аксиомой выбора.

Эти примеры показывают, что в самых простых и обыденных рассуждениях из стандартного учебника высшей математики может встретиться неустранимое использование аксиомы выбора. Приведем еще несколько примеров теорем, которые нельзя доказать без аксиомы выбора. Эти теоремы относятся к чуть менее известным областям математики, но также очень употребительны. Мы не будем объяснять значения терминов, входящих в их формулировки: читатель, не понимающий некоторых из них, может спокойно пропустить эти примеры.

Первая из этих теорем утверждает, что любое векторное пространство имеет базис. Ее доказательство (для общего, не обязательно конечномерного, случая) существенно использует аксиому выбора; можно доказать, что без использования этой аксиомы обойтись нельзя.

Вторая теорема гласит, что любые два базиса одного и того же векторного пространства имеют одинаковую мощность. О ее доказательстве можно сказать то же самое.

Третья: любое поле имеет алгебраическое замыкание. И эту теорему (чрезвычайно существенную в алгебре) нельзя доказать, не используя аксиомы выбора.

Мы много раз говорили о том, что некоторые утверждения нельзя доказать, не используя аксиому выбора. Во избежание недоразумений сформулируем точно, что мы при этом имели в виду. Рассмотрим обычную аксиоматическую систему для теории множеств (которая называется системой Цермело — Френкеля и описана, например, в [I, часть II]) и исключим из нее аксиому выбора, не добавляя при этом никаких других аксиом. Говоря о том, что некоторое утверждение не может быть доказано без использования аксиомы выбора, мы имели в виду, что оно не может быть получено в упомянутой «урезанной» системе аксиом.

Из сказанного ясно, что исключение аксиомы выбора из списка аксиом теории множеств приведет к разрушению значительной части современного математического знания. К этому можно относиться двояким образом. Можно считать, что все равно нужно отказаться от аксиомы выбора, а то, что при этом часть математики погибнет, свидетельствует лишь о том, что эта часть есть порождение больной фантазии, уродливый нарост, удаление которого не только не повредит математике, но и жизненно необходимо. В настоящее время, однако, возобладала другая точка зрения. Согласно ей аксиому выбора нужно принять, по-

скольку после этого получаются красивые и полезные математические теории, а многие рассуждения становятся проще. Пожалуй, единственным неопровержимым аргументом против такой точки зрения могло быть только обнаружение противоречия, вытекающего из аксиомы выбора. Другими словами, если бы удалось доказать, что аксиома выбора ложна, от нее пришлось бы волей-неволей отказаться. Но, к счастью (или к сожалению), такого случиться не может. Это доказал Курт Гедель, автор знаменитых «теорем Геделя» (о «полноте исчисления предикатов», о «неполноте формальных систем» и о «невозможности доказательства непротиворечивости формальной системы внутри этой системы»). Рассматриваемый нами результат Геделя не так широко известен, но весьма важен. Сформулируем его более точно. Пусть в теории множеств с аксиомой выбора удалось вывести противоречие (т. е. доказать одновременно и некоторую формулу и ее отрицание). Тогда то же самое можно сделать, и не пользуясь аксиомой выбора. Этот результат означает, что аксиома выбора не увеличивает опасности прийти к противоречию: если такое противоречие и есть, то аксиома выбора в нем не виновата!

Так или иначе в современной математике сложилось такое положение, что «за исключением специалистов в основаниях, работающие математики сегодня почти не склонны воспринимать эти сомнения» (сомнения в истинности аксиомы выбора; цитата взята из книги Ю. И. Манина [7], с. 110).

Отметим еще один факт, который можно рассматривать как аргумент в пользу принятия аксиомы выбора.

Представим себе, что нас интересуют лишь утверждения о натуральных числах (подобные, например, известной гипотезе Ферма или утверждению о существовании нечетных совершенных чисел). Мы предполагаем, что рассматриваемые утверждения не содержат упоминаний никаких множеств, функций и т. д. Говоря точно, эти утверждения должны выражаться формулами «языка арифметики», т. е. языка, содержащего натуральные числа, переменные, пробегающие натуральный ряд, арифметические операции (сложение и умножение) и логические знаки («и», «или», «не»), кванторы («для всех» и «существует»). Оба приведенных выше примера утверждений о натуральных числах могут быть записаны в виде формул этого языка.

Итак, мы рассматриваем лишь «чисто арифметические» (в указанном смысле) утверждения. Однако при их доказательстве мы не ограничиваем себя в средствах и свободно пользуемся всем арсеналом современной теории множеств (с аксиомой выбора или без нее). Этот подход типичен для аналитической теории чисел, которая, например, при изучении распределения простых чисел среди натуральных постоянно пользуется так называемой дзета-функцией Римана. Так вот, что изменится, если мы позволим себе пользоваться аксиомой выбора? Существуют ли какие-нибудь утверждения о свойствах натуральных чисел, которые нельзя доказать, не пользуясь аксиомой выбора, но можно доказать с ее применением? Из результата Геделя относительно аксиомы выбора (точнее, из метода доказательства этого результата) вытекает, что таких утверждений нет: всякое свойство натуральных чисел, которое можно доказать с помощью аксиомы выбора, можно доказать и без нее. Это позволяет рассматривать аксиому выбора как вспомогательное средство, которое нужно только для упрощения доказательств, но которое в любой момент может быть устранено (ценой усложнения доказательства).

Вернемся теперь к нашему нетривиальному ультрафильтру на множестве натуральных чисел. С помощью аксиомы выбора нетрудно доказать его существование. Грубо говоря, идея этого доказательства состоит в следующем. Начнем с того, что (в соответствии с определением ультрафильтра) объявим все конечные множества малыми, а все множества с конечными дополнениями — большими. При этом, разумеется, мы не получим ультрафильтра: например, множество четных чисел не будет объявлено ни малым, ни большим. Тут и проявляется неоднозначность нашего построения: ничто не мешает объявить его большим, но ничто не мешает объявить его и малым. Примем какое-то определенное решение: пусть, например, множество четных натуральных чисел большое. Согласившись с этим, мы неизбежно должны считать некоторые другие множества большими (например, любое множество, содержащее все четные натуральные числа), а некоторые множества мы неизбежно должны считать малыми (например, множество всех нечетных чисел). Но снова останутся множества, про которые мы не можем сказать, какими они будут. Например, множество натуральных чисел, делящихся на 3, может быть как большим, так и малым. Мы снова должны по его поводу принять одно из двух решений. И так далее.

Если повторять этот процесс «бесконечно долго» (как говорят, трансфинитное число раз), мы «в конце концов» расклассифицируем все множества на большие и малые, т. е. построим интересующий нас нетривиальный ультрафильтр на множестве натуральных чисел.

Подчеркнем еще раз, что все сказанное представляет собой не более чем очень грубый и приблизительный набросок доказательства существования нетривиального ультрафильтра. Полное изложение этого доказательства можно найти, например, в § 2 гл. 1 упоминавшейся нами книги Мартина Девиса [3].

Но уже в нашем наброске видна роль аксиомы выбора при этом доказательстве: каждый раз мы должны выбрать множество, не отнесенное пока ни к малым, ни к большим, и принять по его поводу какое-то решение; при этом никакого правила, определяющего порядок выбора множеств, у нас нет.

На этом мы заканчиваем обсуждение поля гипердействительных чисел, строящегося с помощью ультрафильтров. Отметим еще раз, что это не единственный возможный способ построения такого поля, но все другие способы его построения также используют в той или иной форме аксиому выбора. В следующем параграфе мы рассмотрим построение поля гипердействительных чисел с помощью теоремы компактности и обсудим, где в этом построении используется аксиома выбора.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ КОМПАКТНОСТИ

В этом параграфе мы рассмотрим другой (отличный от разобранного в § 6) метод построения поля гипердействительных чисел, обладающего нужными свойствами. (Какие именно свойства нам нужны, мы обсуждали в § 4 и 5.) Но прежде мы должны поговорить о некоторых общелогических понятиях. Именно мы должны обсудить понятие логического языка и понятие интерпретации этого языка. Мы, по существу, уже сталкивались с этими понятиями выше; например, в § 5 при обсуждении принципа переноса речь шла о двух интерпретациях (стандартной и нестандартной) некоторого языка. (В этом параграфе мы уточним

сказанное в § 5 и дадим более точную формулировку принципа переноса.) В § 6, говоря о результатах Гёделя, связанных с аксиомой выбора, мы говорили об утверждениях, записываемых на языке арифметики.

Сейчас мы рассмотрим общее понятие односортного языка первого порядка. (Поскольку мы не будем говорить о других типах языков, мы будем опускать слова «односортный» и «первого порядка».)

Пусть фиксирован набор символов $\{P, Q, \dots\}$, элементы которого мы будем называть *предикатными символами*, и набор $\{f, g, \dots\}$, элементы которого мы будем называть *функциональными символами*. Пусть каждому предикатному и каждому функциональному символу сопоставлено некоторое натуральное число, называемое *числом аргументов*, или *валентностью*, соответствующего символа. В таком случае говорят, что задан некоторый *язык* (точнее, односортный язык первого порядка).

Определим теперь понятие *формулы* данного языка. Прежде чем давать формальное определение, приведем несколько примеров формул. Пусть язык содержит предикатные символы P, Q, R с числом аргументов 0, 1, 2 соответственно и функциональные символы f, g, h также с числом аргументов 0, 1, 2 соответственно. Тогда формулами этого языка будут, например, такие знакосочетания:

$$\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x, x))$$
$$(\exists y R(x, y) \Rightarrow (Q(z) \wedge Q(w)))$$
$$\forall x(f = g(x))$$
$$\exists x(h(x, y) = h(h(x, x), g(y)))$$
$$(\exists x R(x, x) \wedge P)$$

(Вторая из этих формул, например, читается так: «если существует такое y, что имеет место R от x, y, то имеют место Q от z и Q от w.)

Если этих примеров окажется достаточно, чтобы создать ясное представление о понятии формулы, то последующее точное определение этого понятия можно смело пропустить. Тем не менее мы дадим его. Выберем и зафиксируем бесконечную последовательность символов, называемых переменными. Пусть это будут, например, символы x, y, z, u, v, w, x_1, ... Определим вначале понятие *терма*. Именно (T1) любая переменная и любой функциональный символ с нулем аргументов суть термы;
(T2) если термы $t_1, \dots, t_m$ уже построены, а f — функциональный символ с m аргументами, то выражение

$f(t_1, \ldots, t_m)$ есть терм.

Термами называются те и только те выражения, которые можно получить путем многократного применения правил (Т1) и (Т2). Например, выражения

$$x, f, g(x), h(x, y), h(h(x, x), g(y))$$

являются термами. Определим теперь понятие формулы следующим образом:

(Ф1) если t и s — термы, то $(t=s)$ — формула; (Ф2) если $t_1, \ldots, t_m$ — термы, а P — предикатный символ с m аргументами, то $P(t_1, \ldots, t_m)$ — формула; если P — предикатный символ с нулем аргументов, то P — формула;

(Ф3) если P и Q—формулы, то $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$ (читается: «не P», «P и Q», «P или Q», «если P, то Q») — формулы;

(Ф4) если P — формула, а ξ — переменная, то $\forall \xi P$ и $\exists \xi P$ (читается: «для всех ξ верно P» и «существует такое ξ, что P») — формулы.

Формулами называются те и только те выражения, которые можно получить путем многократного применения правил (Ф1) — (Ф4).

Итак, понятие формулы определено. Теперь мы хотим обсудить, какой смысл придается формулам. Для этого нужно прежде всего придать смысл входящим в них предикатным и функциональным символам. Именно, каждому предикатному символу с числом аргументов m нужно поставить в соответствие m-местный предикат, а каждому функциональному символу с числом аргументов m — некоторую m-местную функцию. (Все эти предикаты и функции должны, конечно, быть заданы на одном и том же множестве.) Если это сделано, то говорят, что задана интерпретация языка. Точнее, пусть имеется некоторый язык L с предикатными символами $\{P, Q, \ldots\}$ и функциональными символами $\{f, g, \ldots\}$. Определить интерпретацию языка L означает:

1) выбрать некоторое множество M — носитель интерпретации;

2) с каждым предикатным символом P валентности m сопоставить некоторый m-местный предикат, т. е. некоторую функцию **P**, аргументами которой являются кортежи (= конечные последовательности) из m элементов множества M, а значениями — символы **И** (истина) и **Л** (ложь): $\mathbf{P} : M^m \to \{\text{И}, \text{Л}\}$;

3) с каждым функциональным символом f валентности k сопоставить некоторую функцию $\mathbf{f}$, ставящую в соответствие любой k-элементной последовательности элементов M некоторый элемент M : $\mathbf{f}$: $M^k \to M$. (В этом определении числа m и k могут быть равны нулю; функциональным символам с нулем аргументов при интерпретации должны соответствовать элементы M, а предикатным — символы И и Л.)

Чтобы окончательно определить смысл формул, надо объяснить смысл других входящих в них знаков. Как правило, смысл их ясен из их названий. Мы ограничимся тем, что приведем несколько примеров.

Формула $Q(x)$ утверждает, что значение переменной x обладает свойством, обозначенным через Q. Более точно, пусть в данной интерпретации с носителем M символу Q соответствует функция $\mathbf{Q}$ с областью определения M и значениями И и Л; тогда истинность формулы $Q(x)$ (в этой интерпретации) будет зависеть от того, какой элемент $x_0 \in M$ взят в качестве значения переменной x. Именно, $Q(x)$ будет истинной при $x=x_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{Q}(x_0)=$И.

Аналогично истинность формулы $h(x, x)=h(h(x, x), g(y))$ зависит не только от выбранной интерпретации, но и от значений переменных x и y. Эта формула будет истинна при $x=x_0$ и $y=y_0$, если элементы $x_0 \in M$ и $y_0 \in M$ таковы, что $\mathbf{h}(x_0, x_0)=\mathbf{h}(\mathbf{h}(x_0, x_0), \mathbf{g}(y_0))$.

Рассмотрим теперь формулу $\exists x Q(x)$. Ее истинность уже не зависит от значения x, а полностью определяется выбором интерпретации. Именно, эта формула истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{Q}$ принимает значение И хотя бы на одном элементе M.

Истинность формулы

$$\exists x(h(x, y)=h(h(x, x), g(y)))$$

также не зависит от значения переменной x. Ее истинность полностью определяется выбором интерпретации и значения переменной y.

Из приведенных примеров ясно видно различие между «связанными» и «свободными» вхождениями переменных. Вхождение переменной ξ называется *связанным*, если оно попадает в область действия квантора $\forall \xi$ или $\exists \xi$; в противном случае оно называется свободным. Например, в формуле $Q(x)$ вхождение переменной x свободно, а в формуле $\exists x Q(x)$ связано. Аналогично в формуле

$$h(x, y) = h(h(x, x), g(y))$$

все вхождения переменных x и y свободны, в то время как в формуле

$$\exists x(h(x, y) = h(h(x, x), g(y)))$$

все вхождения переменной x связаны, а переменной y по-прежнему свободны.

Истинность формул зависит от выбора интерпретации и от значений переменных, входящих в эту формулу свободно. Если формула не содержит свободных вхождений (как, например, формула $\exists xQ(x)$), то ее истинность зависит только от выбора интерпретации. Формулы языка, не содержащие свободных вхождений переменных, называют *суждениями* данного языка. Как только мы фиксировали какую-то интерпретацию языка, все суждения разделяются на истинные и ложные.

Пользуясь введенными понятиями, мы можем точно сформулировать принцип переноса. Рассмотрим язык RL, с которым мы познакомились на примерах в § 5; теперь мы можем описать его подробнее. Этот язык содержит символы для всех предикатов, определенных на множестве действительных чисел и имеющих произвольное число аргументов (т. е. для всех функций, определенных на $\mathbf{R}^k$ при некотором k и принимающих значения в {И, Л}; через $\mathbf{R}^k$ обозначается множество всех кортежей из k действительных чисел), а также для всех действительнозначных функций от любого числа действительных аргументов (т. е. для всех функций с областью определения $\mathbf{R}^k$ при некотором $k \geqslant 0$ и со значениями в $\mathbf{R}$). В нашем языке, таким образом, имеется огромное количество предикатных и функциональных символов (для знатоков: их число равно числу всех подмножеств континуума). Каждому символу мы приписываем число аргументов (валентность) естественным образом. Отметим особо функциональные символы с числом аргументов, равным нулю (их называют также константами): в нашем языке для каждого действительного числа имеется своя константа.

Мы употребили в нашем описании не вполне ясный оборот: «для каждого предиката (или функции) в языке имеется предикатный (функциональный) символ». Точный смысл его таков: мы выбираем множество предикатных (функциональных) символов, находящееся во взаимно-однозначном соответствии с множеством предикатов (функ-

ций), и фиксируем это соответствие. Согласно этому соответствию определяются валентности символов. Таким образом, функциональные символы валентности нуль находятся во взаимнооднозначном соответствии с «действительнозначными функциями нуля аргументов», т. е., попросту говоря, с действительными числами.

Теперь мы, наконец, можем дать точное определение гипердействительного числового поля. Рассмотрим стандартную интерпретацию описанного только что языка RL — ту, в которой носителем является множество (стандартных) действительных чисел, а каждый предикатный (функциональный) символ интерпретируется соответствующим предикатом (функцией). Однако язык RL может иметь и другие интерпретации. Пусть в какой-то из них истинны те и только те суждения языка RL, которые истинны в стандартной интерпретации. Пусть $\mathcal{P}$ — такая интерпретация, P — носитель этой интерпретации. Введем на P структуру упорядоченного поля. Это делается так.

Рассмотрим двухместные функции «сложение», «умножение», «вычитание» и «деление» на стандартных действительных числах, сопоставляющие с любыми числами x и y их сумму $x+y$, произведение $x \cdot y$, разность $x-y$ и частное x/y. Как и всяким функциям, им соответствуют символы языка RL; обозначим эти символы A, M, S и D. Будем считать, что функция деления x/y каким-то образом доопределена при $y=0$, т. е. ставит в соответствие парам вида $<x,\ 0>$ какие-то числа (все равно какие, например нуль; это формальное доопределение нужно, потому что в нашем языке имеются символы лишь для всюду определенных функций). Пусть $\bar{0}$ и $\bar{1}$ — символы языка, соответствующие числам (= нульместным функциям) 0 и 1. Как и всем символам языка, символам A, M, S, D, $\bar{0}$ и $\bar{1}$ в интерпретации $\mathcal{P}$ соответствуют некоторые функции. Таким образом, на P возникают четыре двухместные функции и два выделенных элемента. Докажем, что эти функции удовлетворяют аксиомам поля (они были перечислены в § 2) и тем самым на P возникает структура поля. Доказательство этого очень просто. Заметим, что аксиомы поля записываются в виде суждений нашего языка. Например, аксиома дистрибутивности (8) из § 2 записывается так:

$$\forall x \forall y \forall z (M(x,\ A(y,\ z)) = A(M(x,\ y),\ M(x,\ z)))$$

[читается: для всех x, y и z выполнено равенство

$$M(x, A(y, z))=A(M(x, y), \ M(x, z))],$$

а свойство функции деления (9) — так:

$$\forall x \forall y(\neg(y=\bar{0}) \Rightarrow (M(y, D(x, y))=x))$$

[читается: для всех x и y из $y \neq 0$ следует, что

$$M(y, D(x, y))=x].$$

Все суждения, выражающие аксиомы поля, истинны в стандартной интерпретации. Значит (по нашему предположению), они истинны и в интерпретации $\mathscr{P}$. Таким образом, P становится полем. Аналогичным образом на P вводится структура упорядоченного поля: нужно рассмотреть предикатный символ, соответствующий обычному отношению «меньше» на действительных числах, и его значение в интерпретации $\mathscr{P}$. Это упорядоченное поле не обязано, однако, быть архимедовым. (Дело в том, что, как мы уже говорили, аксиома Архимеда не может быть записана в виде суждения нашего языка.)

Теперь мы в состоянии точно сказать, что мы называем гипердействительными числами. Именно, системой гипердействительных чисел называется любая интерпретация $\mathscr{P}$ рассмотренного языка RL, в которой истинны те же суждения, что и в стандартной интерпретации, но для которой (в возникающем упорядоченном поле) не выполнена аксиома Архимеда. Элементы носителя этой интерпретации и называются гипердействительными числами. Таким образом, возможно много систем гипердействительных чисел (оказывается, что различные системы могут даже иметь различную мощность!). Для наших целей годится любая из них. В § 6 мы отмечали, что эта неоднозначность носит принципиальный характер: на самом деле мы не можем явно указать ни одного конкретного примера системы гипердействительных чисел.

Вернемся теперь к основной цели этого параграфа — построению системы гипердействительных чисел с помощью методов математической логики.

Введем предварительно несколько понятий. Пусть фиксирован некоторый язык L. Пусть T — некоторое множество суждений этого языка. Будем говорить, что интерпретация $\mathscr{P}$ языка L является моделью T, если все суждения из T истинны в $\mathscr{P}$. Возьмем в качестве L рассмотренный выше язык RL (с символами для всех предикатов и функций на $\mathbf{R}$), в качестве T — множество Tr всех суждений этого языка, истинных в стандартной его интер-

претации. Тогда в соответствии с нашим определением стандартная интерпретация, так же как и любая система гипердействительных чисел, будет моделью для Tr.

Покажем, что в любой модели для Tr все суждения языка RL, не входящие в Tr, будут ложны. В самом деле, если φ — суждение, не входящее в Tr, то φ ложно в стандартной интерпретации. Тогда отрицание суждения φ, суждение $\neg\varphi$, истинно в ней и, следовательно, входит в Tr. Значит, $\neg\varphi$ истинно в любой модели множества Tr, а φ ложно в любой модели множества Tr. Таким образом, в любой модели множества Tr истинны те и только те формулы, которые истинны в стандартной модели. Доказанное можно сформулировать так: если T — множество формул, истинных в некоторой интерпретации $\mathcal{P}$ языка RL, то свойства $\mathrm{Tr} \subset T$ и $\mathrm{Tr} = T$ равносильны. Теперь задачу отыскания системы гипердействительных чисел можно сформулировать так: найти модель множества Tr, которая (рассматриваемая как упорядоченное поле, см. выше) не удовлетворяет аксиоме Архимеда.

Прежде чем заняться этой задачей вплотную, введем еще один термин, относящийся к произвольному языку L и произвольному множеству T суждений языка L. Назовем множество T *совместным*, если существует его модель, т. е. если существует интерпретация языка L, в которой истинны все формулы из T. Теперь все готово для того, чтобы сформулировать теорему компактности Мальцева, уже упоминавшуюся выше.

Теорема компактности. Пусть имеется произвольный язык L и произвольное множество T суждений этого языка. Пусть каждое конечное подмножество T_1 множества T совместно. Тогда и все множество T совместно.

Эта теорема показывает, что для построения модели множества T достаточно уметь строить модели всех конечных подмножеств множества T. (Обратное очевидно, так как модель множества является и моделью всех его конечных подмножеств.) Доказательство этой теоремы мы обсудим позже, а пока продемонстрируем, как с ее помощью может быть получена система гипердействительных чисел.

Прежде всего добавим к нашему языку RL (содержащему предикатные и функциональные символы для всех предикатов и функций на множестве $\mathbf{R}$) еще один нульместный функциональный символ c (отличный от всех других символов). Получается новый, расширенный язык RL_c. Чтобы

задать интерпретацию нашего языка RL_c, нужно взять произвольную интерпретацию языка RL, выбрать в ее носителе какой-то элемент и объявить его значением добавленного символа c. Наоборот, если мы имеем какую-то интерпретацию языка RL_c, то из нее тривиальным образом получается интерпретация языка RL — нужно просто забыть о символе c и о том, какой элемент ему соответствует. Рассмотрим теперь некоторое множество суждений T_c нового языка. Оно будет содержать, во-первых, все элементы Tr, т. е. все суждения языка RL, истинные в его стандартной интерпретации, и, кроме того, счетное множество суждений вида $G(c, \bar{0})$, $G(c, \bar{1})$, $G(c, \bar{2})$, ..., где G — двухместный предикатный символ, соответствующий предикату «больше» (истинному на паре $<p, q>$ в том и только том случае, если действительное число p больше действительного числа q), а $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$, ... — нульместные функциональные символы языка RL, соответствующие действительным числам 0, 1, 2, ... Нам достаточно доказать, что это множество (T_c) имеет модель. В самом деле, если есть такая модель, то, забыв о символе c, мы получим интерпретацию языка RL (не включающего символ c), являющуюся моделью множества Tr. Эта модель (как упорядоченное поле) будет неархимедовой: ее элемент, соответствующий символу c, будет бесконечно большим.

Итак, осталось доказать совместность множества T_c. Для этого, согласно теореме компактности, достаточно доказать совместность любого конечного подмножества множества T_c. Это будет сделано, если мы покажем совместность семейства

$$T_c(n) = \mathrm{Tr} \cup \{G(c, \bar{0}), \ldots, G(c, \bar{n})\}$$

при любом n, так как любое конечное подсемейство семейства T_c содержится в некотором $T_c(n)$ при достаточно большом n. Чтобы доказать совместность семейства $T_c(n)$, нужно построить его модель. Это очень просто: возьмем стандартную интерпретацию языка RL и расширим ее до интерпретации языка RL_c, считая, что c интерпретируется как число $n+1$. Очевидно, что все формулы семейства $T_c(n)$ будут истинны в этой интерпретации. Тем самым мы доказали совместность семейства $T_c(n)$ при любом n; отсюда по теореме компактности получается совместность семейства T_c; модель этого семейства, как мы видели, превращается в искомую систему гипердействительных чисел, как только мы забудем о c.

Приведенное рассуждение весьма просто; таким образом, основная трудность в построении системы гипердействительных чисел содержится в теореме компактности. Обсудим теперь, каким образом эту теорему можно доказать. Существуют два способа (по крайней мере) ее доказательства. Один из них использует нетривиальные ультрафильтры и аналогичен описанному в § 6 способу построения системы гипердействительных чисел с помощью ультрафильтров. Мы не будем подробно говорить о нем. Другой метод (пожалуй, более естественный) состоит в применении одной из центральных теорем логики — теоремы Гёделя — Мальцева о полноте. К сожалению, точная формулировка этой теоремы далеко выходит за рамки настоящей брошюры, поэтому мы вынуждены ограничиться в этом месте неформальными комментариями.

Если пытаться описать смысл теоремы Гёделя — Мальцева о полноте в одной фразе, можно сказать так: эта теорема дает синтаксический критерий совместности множества суждений. Более подробно. Определяется понятие *выводимости* данного суждения φ из данного множества суждений T. Мы не можем дать здесь точного определения этого понятия, так как оно довольно громоздко. Скажем лишь, что выводимость φ из T означает, что существует последовательность формул, каждая из которых принадлежит либо T, либо заранее фиксированному множеству (элементы которого называются *аксиомами*), либо получается из предыдущих членов последовательности по определенным правилам (эти правила называются *правилами вывода*), причем последней формулой этой последовательности является формула φ. Последовательность формул, обладающая описанными свойствами, называется *выводом* формулы φ из множества формул T. Таким образом, выводимость φ из T означает, что существует вывод формулы φ из T. Уже из этого описания становится ясным такое свойство выводимости: если формула φ выводится из некоторого множества T, то в этом выводе используется лишь конечное число формул из T. Более точно, справедливо такое утверждение: если формула φ выводится из множества T, то существует такое конечное подмножество $T' \subset T$, что формула φ выводится из множества T'. Наконец, назовем множество суждений *противоречивым*, если из него выводится одновременно некоторое суждение φ и его отрицание $\neg\varphi$. Теперь все готово для формулировки теоремы Гёделя (точнее, теоремы Гёделя — Мальцева) о полноте.

Теорема. Пусть L — произвольный язык (полностью следовало бы сказать: односортный язык первого порядка), T — множество суждений этого языка. Тогда следующие свойства равносильны: а) T совместно; б) T не противоречиво. Эта теорема позволяет заменить семантическое (т. е. апеллирующее к интерпретациям) свойство совместности на синтаксическое (рассматривающее формулы только как знакосочетания в отрыве от их смысла) свойство непротиворечивости. Из нее легко вытекает теорема компактности. В самом деле, раз совместность совпадает с непротиворечивостью, нужно доказать лишь, что если всякое конечное подмножество данного множества суждений T непротиворечиво, то и все множество суждений T непротиворечиво. Другими словами, нужно доказать, что если данное множество суждений T противоречиво, то противоречиво и некоторое его конечное подмножество. А это следует из упоминавшегося выше свойства отношения выводимости. Ведь если из множества T выводятся суждения φ и $\neg\varphi$, то (по отмечавшемуся свойству выводимости) найдутся такие конечные подмножества T_1 и T_2 множества T, что из T_1 выводится φ, а из T_2 — $\neg\varphi$. Тогда из конечного множества $T_1 \cup T_2$ выводятся как φ, так и $\neg\varphi$, и, следовательно, оно противоречиво.

Таким образом, теорема компактности легко вытекает из теоремы Гёделя — Мальцева о полноте. (Мы называем теорему о полноте теоремой Гёделя — Мальцева, а не просто теоремой Гёделя, как это обычно делается, так как интересующий нас вариант был впервые доказан Мальцевым; Гёдель доказал равносильность совместности и непротиворечивости лишь для языков со счетным множеством предикатных и функциональных символов.) Таким образом, основная трудность в построении гипердействительных чисел заключена именно в доказательстве теоремы о полноте. Именно при доказательстве этой теоремы приходится пользоваться аксиомой выбора.

Рассмотрим это доказательство чуть более подробно. Наша формулировка теоремы о полноте включает в себя два утверждения. Первое состоит в том, что всякое совместное множество суждений непротиворечиво, второе — что всякое непротиворечивое множество совместно. Первое из этих утверждений (иногда его выделяют в качестве самостоятельного утверждения, называя теоремой адекватности, или теоремой непротиворечивости) доказывается весьма просто. Основная сложность заключена во втором утвер-

ждении. В нем нужно доказать существование модели, а известно лишь, что не существует вывода противоречащих друг другу формул φ и $\neg\varphi$. При этом доказательстве приходится пользоваться аксиомой выбора. В результате этого искомая модель (модель заданного непротиворечивого множества суждений) строится неоднозначно, и по ее поводу можно повторить все то, что было сказано по поводу рассмотренных нами нетривиальных ультрафильтров. Так что с этой точки зрения (с точки зрения возможности «конструктивного», «эффективного», «явного» и т. п. задания рассматриваемых объектов) построение системы гипердействительных чисел с помощью теоремы о полноте ничем не лучше и не хуже, чем ее построение с помощью нетривиальных ультрафильтров.

§ 9. ИСТОРИЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Возраст нестандартного анализа колеблется (в зависимости от точки зрения) от двух десятков до трех сотен лет. Два десятка получатся, если считать, что нестандартный анализ зародился осенью 1960 г., когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал на одном из семинаров Принстонского университета доклад о возможности применения методов математической логики к обоснованию математического анализа. Триста лет получатся, если считать началом нестандартного анализа появление символов бесконечно малых dx и dy в упоминавшемся уже трактате Лейбница [5]; хотя, строго говоря, dx и dy не обозначают в этом трактате (да и в современных текстах) непременно бесконечно малых, «фактически, — как отмечается в [2, с. 115], — сам Лейбниц и его последователи рассматривали dx и dy как бесконечно малые».

В настоящей брошюре мы придерживаемся первой, более простой точки зрения и считаем началом развития (пока еще недолгого, но весьма интенсивного) нестандартного анализа упомянутый доклад А. Робинсона. С этого момента начинается современная история нестандартного анализа. Но прежде чем говорить о ней, поговорим о его предыстории.

Как и всякое другое научное направление, нестандартный анализ возник не на пустом месте. Основные его источ-

ники, на наш взгляд, были таковы. Во-первых, это идущая от классиков математического анализа традиция употребления бесконечно больших и бесконечно малых — традиция, сохранившаяся (несмотря на все попытки ее изгнания) до нашего времени в преподавании математики для инженеров. (О попытках использования нестандартного анализа в преподавании см. ниже.) Второй, менее очевидный источник — нестандартные модели аксиоматических систем, появившиеся в математической логике. Скажем о них чуть более подробно.

Аксиоматический метод изучения какой-то математической структуры состоит, грубо говоря, в следующем. Мы выделяем некоторые свойства рассматриваемой структуры и называем их аксиомами. Затем мы выводим из аксиом различные следствия (теоремы). Эти теоремы будут истинны в рассматриваемой структуре. Более того, они будут истинны не только в рассматриваемой структуре, но и в любой другой, в которой истинны аксиомы. Может оказаться, что существует много самых разных структур, удовлетворяющих данной системе аксиом (моделей рассматриваемой системы). Хорошо это или плохо? Это зависит от того, с какой целью создавалась аксиоматическая система. Если она, подобно системе аксиом поля, предназначена для того, чтобы выделить общие свойства различных структур и единым методом получать результаты о всех этих структурах, то чем разнообразнее модели этой аксиоматической системы, тем лучше. Разнообразие моделей системы аксиом поля свидетельствует о широкой применимости теории полей. (То же самое можно сказать и про аксиомы групп, колец и т. п.)

Существует, однако, и другой подход к аксиоматическим системам, согласно которому аксиоматическая система должна возможно более полно отражать свойства данной конкретной структуры, например множества натуральных чисел. Примером аксиоматической системы, созданной с такой целью, являются аксиомы Пеано, характеризующие натуральный ряд как множество N с выделенным элементом (обозначаемым O и называемым нулем) и одноместной операцией (обозначаемой S и называемой прибавлением единицы или взятием последующего):

1. $\forall\, a(O \neq S(a))$.

2. $\forall\, a \,\forall\, b((S(a)=S(b)) \Rightarrow (a=b))$.

3. (Аксиома индукции). Если множество $M \subset N$ таково, что $O \in M$ и для всякого $a \in M$ выполнено $S(a) \in M$, то $M = N$.

Эти аксиомы предназначены для того, чтобы как можно полнее отражать свойства натуральных чисел. Поэтому обнаружение структуры (множества N с выделенным элементом и одноместной операцией), которая удовлетворяла бы этим аксиомам, но сильно отличалась бы от обычного натурального ряда, означало бы, что эти аксиомы неудовлетворительны. К счастью, оказывается, что найти такую структуру нельзя. Именно имеет место такое утверждение (категоричность аксиом Пеано).

Пусть N — произвольное множество, O — любой элемент N и S — функция, определенная на N со значениями в N, причем выполнены свойства 1—3. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством N и обычным натуральным рядом **N**, при котором элементу $O \in N$ соответствует натуральное число 0, а функция S переходит в функцию прибавления единицы (как говорят, структуры N и **N** изоморфны).

Доказательство этого утверждения достаточно просто, и мы приведем его. Установим искомое соответствие таким образом:

натуральные числа	элементы
0	O
1	$S(O)$
2	$S(S(O))$
3	$S(S(S(O)))$
	. .

Обозначив $\underbrace{S(S(\cdots S(O)\cdots)}_{m \text{ раз}}$ через $S^m(O)$, можно сказать, что натуральному числу $m \in \mathbf{N}$ ставится в соответствие элемент $S^m(O) \in N$. Нужно доказать, что это соответствие взаимно однозначно, т. е. что $S^m(O) \neq S^n(O)$ при $m \neq n$ и что любой $x \in N$ равен $S^m(O)$ при некотором m. Если $S^m(O) = S^n(O)$, $m \neq n$ и $m, n > 0$, то $S^{m-1}(O) = S^{n-1}(O)$ по аксиоме 2 [так как $S^k(O) = S(S^{k-1}(O))$]. Применяя это рассуждение несколько раз, находим, что

$$S^{m-n}(O) = O, \text{ т. е. } S(a) = O, \text{ где } a = S^{m-n-1}(O)$$

(для определенности мы рассматривали случай $m>n$). А это противоречит аксиоме 1. Чтобы завершить доказательство взаимной однозначности, нужно показать еще, что множество $M=\{O, S(O), \ldots, S^n(O), \ldots\}$ совпадает со всем N. Это непосредственно следует из аксиомы индукции. Итак, взаимная однозначность построенного соответствия доказана. То, что при этом соответствии нуль переходит в элемент O, а функция прибавления единицы — в функцию S, очевидно. Таким образом категоричность аксиом Пеано доказана.

Таким образом, можно сказать, что аксиомы Пеано «полностью» описывают натуральные числа.

Однако система аксиом Пеано имеет следующий недостаток: она предполагает заранее известным понятие множества (это понятие фигурирует в аксиоме индукции). Хотелось бы, чтобы все аксиомы были записаны в виде суждений некоторого языка первого порядка (наподобие первых двух аксиом они представляют собой суждения языка первого порядка с одним нульместным и с одним одноместным функциональными символами). При этом хотелось бы, чтобы свойство категоричности (изоморфизма всех моделей этой системы аксиом) сохранилось. К сожалению, теорема Гёделя о полноте и ее следствие — теорема компактности — разрушают надежду на построение категоричной системы аксиом в языке первого порядка — такой системы аксиом не существует ни для какой структуры, содержащей бесконечное число элементов. Поясним, почему так получается. Возьмем в качестве системы аксиом множество T всех суждений, истинных в данной структуре. Ясно, что эта система аксиом самая большая из всех возможных; если она окажется не категоричной, то и любая другая система аксиом, записанных на том же языке, не будет категоричной. Далее, применяя рассуждения, аналогичные использованным в § 7, мы можем построить модель множества T, существование которой противоречит требованию категоричности, иными словами, «нестандартную» модель множества T.

Приведенное выше обсуждение аксиоматического метода (весьма неточное и расплывчатое) понадобилось нам для того, чтобы показать, каким образом исследование возможностей этого метода приводит к понятию нестандартной модели. К 1960 г. методы построения нестандартных моделей (и с помощью ультрафильтров, и с помощью теорем

полноты и компактности) были давно разработаны и хорошо известны специалистам по теории моделей, одним из основателей которой был А. Робинсон. (Советскому читателю он известен по русскому переводу [8] его монографии; нестандартному анализу посвящены три заключительных параграфа этой монографии — 9.4, 9,5 и 9.6.) Оставалось «всего лишь» соединить их с идеями о применении бесконечно малых величин в анализе, чтобы положить начало бурному развитию нестандартного анализа.

Проследим за историей этого развития. В 1961 г. появилась статья А. Робинсона «Нестандартный анализ» в Трудах Нидерландской академии наук [39]. В статье были намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В этой статье Робинсон, в частности, писал: «Наша главная цель — показать, что эти модели дают естественный подход к старой почтенной проблеме построения исчисления, включающего бесконечно большие и бесконечно малые количества. Как хорошо известно, использование бесконечно малых, настойчиво защищаемое Лейбницем и без колебаний принимаемое Эйлером, было дезавуировано с появлением методов Коши, поставивших математический анализ на твердую основу». (Заметим в скобках, что за твердость основы надо было платить и сложностью аппарата, и отдалением от физической наглядности.)

В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г.— книга В. А. Дж. Люксембурга «Нестандартный анализ. Лекции о робинсоновой теории бесконечно малых и бесконечно больших чисел» [33], в 1966 г. — книга самого А. Робинсона «Нестандартный анализ» [40] и в 1969 г. — книга М. Маховера и Дж. Хиршфелда «Лекции о нестандартном анализе» [37] (из 77 страниц этих «Лекций» действительной прямой отведено немногим более двух: «нестандартный анализ» понимается здесь в самом широком смысле). Наибольший резонанс вызвала книга Робинсона, вышедшая в известной серии «Исследования по логике и основаниям математики». В девяти первых главах этой монографии содержалось как построение необходимого логико-математического аппарата (со ссылкой на А. И. Мальцева как автора лежащей в основе этого аппарата теоремы компактности), так и многочисленные приложения — к дифференциальному и интегральному исчислению, к общей тополо-

гии, к теории функций комплексного переменного, к теории групп Ли, к гидродинамике и теории упругости. Специальный интерес представляет последняя, десятая глава, в которой автор излагает свой взгляд на историю развития математического анализа. Хотя книга Робинсона, выдержавшая не одно издание, и сыграла значительную роль в развитии нестандартного анализа, ее вряд ли следует рекомендовать для начального ознакомления; она написана сжато и трудно.

Помимо выхода книги Робинсона, в 1966 г. в нестандартном анализе произошло еще одно событие. Появилась статья А. Р. Бернстейна и А. Робинсона [14], в которой впервые методами нестандартного анализа было получено решение ранее поставленной проблемы, относящейся к обычным, «стандартным» математическим объектам. Для знатоков поясним, какая проблема имеется здесь в виду. Речь идет о проблеме инвариантных пространств для полиномиально компактных операторов (оператор T называется полиномиально компактным, если компактен оператор $p(T)$ для некоторого полинома p с комплексными коэффициентами). Краткая история вопроса такова. Теорема о существовании нетривиального инвариантного замкнутого подпространства для компактных операторов в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве была доказана Дж. фон Нейманом в начале 30-х годов. (Как известно, все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны «каноническому» пространству l^2, состоящему из последовательностей комплексных чисел, суммируемых с квадратом; что касается несепарабельных пространств, то для них названная теорема очевидна.) Доказательство Неймана, однако, не было опубликовано. Та же теорема для компактных операторов в произвольном банаховом пространстве над полем комплексных чисел была установлена впоследствии Н. Ароншайном и К. Т. Смитом [11].

В очерке П. Р. Халмоша «Взгляд в гильбертово пространство» [21] в качестве проблемы № 9 фигурирует поставленная К. Т. Смитом задача о существовании инвариантного подпространства для таких операторов T в гильбертовом пространстве l^2, для которых оператор T^2 компактен (все такие T, очевидно, полиномиально компактны). Решение этой проблемы и было получено А. Р. Бернстейном и А. Робинсоном методами нестандартного анализа; они доказали, что любой полиномиально компактный

оператор в гильбертовом пространстве l^2 имеет нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство. П. Р. Халмош ознакомился с доказательстом двух названных авторов и переработал их доказательство в свое, не использующее нестандартный анализ [22]. В дальнейшем Бернстейн, используя нестандартный анализ, распространил теорему Бернстейна — Робинсона на случай полиномиально компактных операторов в произвольных банаховых пространствах над полем комплексных чисел [13]. Сравнительно недавно теорема об инвариантных подпространствах для компактных операторов была обобщена (также с помощью методов нестандартного анализа) на более широкий класс линейных топологических пространств, чем банаховы [20].

Теорема Бернстейна — Робинсона представляет собой отнюдь не единственный (хотя, быть может, наиболее эффектный) пример применения методов нестандартного анализа. Число и разнообразие таких применений (заложенных, как мы видели, еще Робинсоном) неуклонно растут. Приложения нестандартного анализа внутри математики охватывают обширную область от топологии (см. [6, с. 210—211], [12], [25]) до теории дифференциальных уравнений [10], теории мер и вероятностей (в которой возникает возможность понимания вероятности события как отношения бесконечного числа благоприятных исходов к общему числу исходов), см. [15], [31], [38], [43] и теории игр [44].

Что касается внематематических приложений, то среди них мы встречаем даже приложения к математической экономике (рассматривается рынок с бесконечно большим числом участников, каждый из которых вносит бесконечно малый вклад) [16], [17]. Многообещающим выглядит использование нестандартного гильбертова пространства $^*l^2$ для построения квантовой механики (традиционно формулируемой в терминах «обычного» пространства l^2), см. [19], а также [30] (рассматривается бесконечная флуктуация поля в бесконечно малой области) и [29]. А в статистической механике становится возможным рассматривать системы из бесконечного числа частиц, см. [24].

Помимо применений к различным областям математики (и не только математики), исследования в области нестандартного анализа включают в себя и исследование самих нестандартных структур (см. например, [26]).

В 1976 г. вышли сразу три книги по нестандартному анализу: «Элементарный анализ» и «Основания исчисления

бесконечно малых» Г. Дж. Кейслера ([27, [28]) и «Введение в теорию бесконечно малых» К. Д. Стройана и В. А. Дж. Люксембурга [41]. Первая из них представляет собой написанный с нестандартных позиций учебник по математическому анализу — типа учебника для втузов с повышенными требованиями по математике. В этой книге большое число примеров и упражнений; однако многие доказательства даны лишь эскизно; само существование поля гипердействительных чисел и некоторый вариант принципа переноса провозглашены в качестве аксиом. Все необходимое обоснование перенесено во вторую книгу, тесно связанную с первой и выступающую в качестве руководства для преподавателей. «Основания исчисления бесконечно малых» содержат тот материал, который следует предварительно изучить, чтобы квалифицированно использовать в преподавании «Элементарный анализ». Наконец, книга Стройана и Люксембурга — это фундаментальная монография, вызывающая при чтении трудности даже у специалистов.

В 1977 г. вышла книга М. Девиса, русский перевод которой [3] уже неоднократно упоминался нами. Эта книга, пожалуй, в наибольшей степени подходит для первого ознакомления с предметом. Слова «прикладной нестандартный анализ» суть буквальный перевод английского названия книги; содержанию книги больше отвечало бы название «Нестандартный анализ и его приложения» при понимании термина «нестандартный анализ» в широком смысле общей абстрактной теории; действительно, первая глава книги посвящена именно такой теории, а остальные главы — приложениям этой теории. Так, в главе второй общие построения первой главы применяются к изучению множества действительных чисел **R**, а в главе третьей — к изучению метрических и, более общо, топологических пространств. В главе четвертой рассматривается приложение методов нестандартного анализа к задачам исследования нормированных линейных пространств, а в главе пятой — к исследованию гильбертова пространства l^2; центральное место в последней главе занимает доказательство ранее упоминавшейся уже теоремы Бернштейна — Робинсона.

Быть может, наибольшую пользу нестандартные методы могут принести в области прикладной математики — недаром физики и инженеры так любят говорить о «бесконечно малом» и «бесконечно большом»! В 1981 г. в серии

«Lecture notes in mathematics» вышла книга Р. Лутца и М. Гозе «Нестандартный анализ: практическое руководство с приложениями» [32]. В этой книге после изложения основных принципов нестандартного анализа рассматриваются вопросы теории возмущений. Грубо говоря, задача теории возмущений состоит в следующем. Имеется какой-то объект (многочлен, линейный оператор, алгебра Ли, дифференциальное уравнение и т. д.). Его чуть-чуть изменяют. Как связаны свойства получившегося объекта со свойствами исходного? На языке нестандартного анализа задача ставится так. Исходный объект является стандартным. Изменение, которому он подвергается, бесконечно мало. Что можно сказать о свойствах измененного объекта, если нам известны свойства исходного? Мы видим, что понятия нестандартного анализа фигурируют уже в самой постановке задачи (а не только в ее решении). Разумеется, можно пытаться перевести задачу на язык классического анализа (без бесконечно малых) и решать ее классическими средствами, но, как пишут авторы рассматриваемой книги, в результате применения нестандартных методов появляются «как изящные формулировки, так и интуитивно более ясные доказательства» (с. 127).

В частности, в 8-м уроке IV части книги Лутца и Гозе рассматривается приобретшая широкую известность (не в малой степени благодаря усилиям математиков круга Н. Бурбаки, см. [18]) так называемая «проблема уток». Эта проблема состоит в требовании объяснить, каким образом у уравнения Ван-дер-Поля

$$\varepsilon\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=a,$$

где ε положительно и достаточно мало, исчезает предельный цикл, когда параметр a, возрастая, переходит через значение 1. Термин «утка» объясняется тем, что этот цикл в процессе своего превращения приобретает форму, напоминающую контур летящей утки. Рассмотрение параметра ε не просто как малого действительного, но как бесконечно малого гипердействительного числа оказалось для этой задачи чрезвычайно полезным.

В настоящее время нестандартный анализ завоевывает все большее признание. Состоялся ряд международных симпозиумов, специально посвященных нестандартному ана-

лизу и его приложениям [34], [35], [23]. В течение последнего десятилетия нестандартный анализ (точнее, элементарный математический анализ, но основанный на нестандартном подходе) преподавался в ряде высших учебных заведений США. Некоторые итоги такого рода преподавания были подведены в методической статье, опубликованной в 1976 г. в «Американском математическом ежемесячнике» [42]. Статья заканчивается следующими фразами: «Опасения, ... что те студенты, которые будут изучать математический анализ при помощи инфинитезимальных (бесконечно малых) элементов, в меньшей степени овладеют основными навыками, должны быть, без сомнения, сняты. Более того, представляется весьма вероятным, что использование инфинитезимального подхода сделает курс математического анализа гораздо более живым и увлекательным как для преподавателей, так и для студентов».

ЛИТЕРАТУРА

Поскольку предлагаемая читателю брошюра является одним из первых изданий на русском языке, посвященных нестандартному анализу *, мы сочли целесообразным снабдить ее достаточно обширным списком литературы.

1. Барвайс Дж., редактор. Справочная книга по математической логике. Пер. с англ. В четырех частях. Часть I. Теория моделей. М., Наука, 1982. 392 с. Часть II. Теория множеств. М., Наука, 1982, 375 с.

2. Башмакова И. Г. и др. (составители). Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей. М., Просвещение, 1977. 224 с.

3. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М., Мир, 1980. (Русский перевод книги: Davis M. Applied nonstandard analysis. New York et al.: John Wiley & Sons, 1977.)

4. Дружинин В. В., Конторов Д. С. Идея, алгоритм, решение. М., Военное издательство, 1972. 326 с. (Библиотека офицера.)

5. Лейбниц Г. В. Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления. Перевод А. П. Юшкевича [латинского мемуара «Nova methodus pro maximis et minimis...»].— Успехи математических наук, 1948, т. 3, вып. 1 (23), с. 166—173. (Отрывки приведены также в [2], с. 110—114.)

6. Малыхин В. И., Пономарев В. И. Общая топология (теоретико-множественное направление).— В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 13. М., ВИНИТИ, 1975 (Итоги науки и техники).

7. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. М., Советское радио, 1979.

8. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. Пер. с англ. М., Наука, 1967.

9. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. I. Изд. 2-е. Пер. с лат. М., 1961.

10. Albeverio S., Fenstad J. E., Hegn-Krohn R. Singular Perturbations and nonstandard Analysis.— Transactions of the American Mathematical Society, August 1979, v. 252, p. 275—295.

11. Aronszajn N., Smith K. T. Invariant Subspaces of Completely Continuous Operators.— Ann. Math., 1954, v. 60, N 2.

12. Bellenot S. F. Nonstandard Topological Vector Spaces.— In: [23], p. 37—39.

13. Bernstein A. R. Invariant Subspaces of Polynomially Compact Operators on Banach Spaces.— Pacific J. Math., 1967, v. 21, N 3, p. 445—464.

14. Bernstein A. R., Robinson A. Solution of In-

* Автору известны только такие издания: [3], [45], [46]; кроме того, нестандартному анализу посвящены § 9.4, 9.5 и 9.6 из [8] и глава 6 из [1, часть I].

variant Subspace Problem of K. T. Smith and P. R. Halmos.— Pacific J. Math., 1966, v. 16, N 3, p. 421—431.

15. Bernstein A. R., Wattenberg F. Nonstandard Measure Theory.— In: [34], p. 171—185.

16. Brown D., Robinson A. A Limit Theorem on the Cores of Large Standard Exchange Economies.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1972, v. 69, N 5, p. 1258—1260.

17. Brown D., Robinson A. Nonstandard Exchange Economies.— In: [23], p. VIII—IX.

18. Cartie P. Perturbations singulières des équations différentielles ordinaries et analyse non-standard.— Seminaire Bourbaki, 1981/82, 34e année, N 580, p. 580-01—580-24.

19. Farukh M. D. Application of Nonstandard Analysis to Quantum Mechanics. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, N 2, pp. 177—200.

20. Grainger A. D. Invariant Subspaces of Compact Operators on Topological Vector Spaces.— Pacific J. Math., 1975, v. 56, N 2, p. 477—493.

21. Halmos P. R. A Glimps into Hilbert Space.— Lectures on Modern Mathematics, v. I. New York — London, 1963, p. 1—22.

22. Halmos P. R. Invariant Subspaces of Polinomially Compact Operators.— Pacific J. Math., 1966, v. 16, N 3, p. 433—437.

23. Hurd A., ed. Victoria Symposium on Non-Standard Analysis. Lecture Notes in Mathematics. No 369, Springer — Verlag, 1974.

24. Hurd A. E. Nonstandard Analysis and Lattice Statistical Mechanics: a Variational Principle.— Transactions of the American Mathematical Society, 1981, v. 263, N 1, p. 89—110.

25. Janz A. Eine neue Variante der Nichtstandard-Analysis und einige ihrer Anwendungen in der allgemeine Topologie. Berlin: Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1980. [Seminarbericht Nr. 30.]

26. Kamo S. Nonstandard Natural Number Systems and Nonstandard Models.— The Journal of Symbolic Logic, 1981, v. 46, N 2, p. 365—376.

27. Keisler H. J. Elementary Calculus. Weber & Schmidt [Prindle], 1976.

28. Keisler H. J. Foundations of Infinitesimal Calculus. [Weber & Schmidt [Prindle], 1976.

29. Kelemen P. J. Quantum Mechanics, Quantum Field Theory and Hyper-Quantum Mechanics.— In: [14], p. 116—121.

30. Kelemen P. J., Robinson A. The Nonstandard λ: $\varphi_2^4(x)$: Model.— J. Math. Phys., 1972, v. 13, N 12, p. 1870 — 1878.

31. Loeb P. Conversion from Nonstandard to Standard Measure Spaces and Applications to Probability Theory.— Trans. Amer. Soc., 1975, v. 211, p. 113—122.

32. Lutz R., Goze M. Nonstandard Analysis. A Practical Guide with Applications. Berlin et al.: Springer-Verlag, 1981. 261 p. [Lecture Notes in Mathematics, v. 881].

33. Luxemburg W. A. J. Non-Standard Analysis. Lectures on Robinson's Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers. Pasadena, 1962 and revised edition, 1964.

34. L u x e m b u r g W. A. J., ed. Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory. Proceedings of an International Symposium on Nonstandard Analysis. Holt — Rinehart and Winston, 1969.

35. L u x e m b u r g W. A. J., ed. Contributions to Non-Standard Analysis. Symposium at Oberwolfach, 1970. North-Holland, 1972.

36. L u x e m b u r g W. A. J. What is Nonstandard Analysis? — American Mathematical Monthly, 1973, v. 80, N 6 [Papers of the Foundations of Mathematics], Part 11, p. 38—67.

37. M a c h o v e r M., H i r s c h f e l d J. Lectures of Non-Standard Analysis. [Lecture Notes in Mathematics, No 94]. Springer-Verlag, 1969.

38. P a r i k h R., P a r n e s M. Conditional Probabilities and Uniform Sets.— In [14], p. 180—194.

39. R o b i n s o n A. Non-Standard Analysis.— Proc. Konikl. ned. akad. wet. A, 1961, v. 64, N 4, p. 432—440. Reprinted in: Indagationes mathematicae, 1961, v. 23, p. 432—440.

40. R o b i n s o n A. Non-Standard Analysis. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1966.

41. S t r o y a n K. D., L u x e m b u r g W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals. Academic Press, 1976.

42. S u l l i v a n K. The Teaching of Elementary Calculus Using the nonstandard Analysis Approach.— Amer. Math. Monthly, 1976, v. 83, N 5, p. 370—375.

43. W a t t e n b e r g F. Nonstandard Measure Theory: Avoiding Pathological Sets.— Transactions of the American Mathematical Society, June 1979, v. 250, p. 357—368.

44. W e s l e y E. An Application of nonstandard Analysis to Came Theory.— The Journal of Symbolic Logic, 1971, v. 36, N 3, p. 385—394.

45. Основы нестандартного анализа: Методическая разработка для студентов старших курсов математического факультета/Сост.. Молчанов В. А.; Саратовский гос. пед. институт им. К. А. Федина: Саратов, 1982. 41 с. Ротапринт.

46. Нестандартные модели анализа: Методическая разработка для студентов старших курсов математического факультета/Сост.: Молчанова Т. П., Молчанов В. А.; Саратовский гос. пед. институт им. К. А. Федина. Саратов, 1982. 61 с. Ротапринт.

СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Андреевич УСПЕНСКИЙ

НЕСТАНДАРТНЫЙ, ИЛИ НЕАРХИМЕДОВ, АНАЛИЗ

Главный отраслевой редактор Л. А. Ерлыкин. Редактор Г. Г. Карвовский. Мл. редактор Г. И. Валюженич. Обложка художника Л. П. Ромасенко. Худож. редактор М. А. Бабичева. Техн. редактор А. М. Красавина. Корректор В. В. Каночкина

ИБ № 6032

Сдано в набор 17.06.83. Подписано к печати 02.08.83. Т-11692. Формат бумаги 84×108$^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Усл. кр.-отт. 3,57. Уч.-изд. л. 3,43. Тираж 29 980 экз. Заказ 1459. Цена 11 коп.
Издательство «Знание», 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 834308.
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Уважаемый читатель!

Напоминаем вам, что приближается срок возобновления подписки на периодические издания, в том числе и на научно-популярную серию «МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА».

Серия знакомит с современными достижениями и основными направлениями развития математики и кибернетики. Наряду с теоретическими вопросами большое внимание уделяется практическим приложениям к решению важнейших научных и народнохозяйственных проблем. Обсуждаются методологические и философские стороны развития математического знания, проблемы математического образования.

Серия рассчитана на специалистов математиков, инженеров, учащихся вузов и слушателей народных университетов, преподавателей и учителей. Отдельные брошюры будут полезны и школьникам.

В 1984 г. подписчики получат 12 брошюр, среди которых:

Л. Н. Королев. РАЗВИТИЕ ЭВМ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ.

А. А. Петров. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ.

П. С. Краснощеков. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ.

С. Е. Дромашко, Ю. М. Романовский. ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЕНЕТИКИ.

Н. Н. Моисеев. МОДЕЛИ ЭКОЛОГИИ И ЭВОЛЮЦИИ.

Г. Г. Еленин, В. А. Дородницын. СИММЕТРИЯ В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

А. М. Тер-Крикоров. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ И МАЛЫЙ ПАРАМЕТР.

Б. В. Гнеденко. М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ «ФИЗИКА»

Издательство «Знание» выпускает в свет ежегодную серию подписных научно-популярных брошюр «ФИЗИКА».

Серия знакомит читателей с достижениями современной физики. В брошюрах серии ученые рассказывают о новых исследованиях в области физики твердого тела, элементарных частиц, биофизики и т. д.

В 1984 г. подписчики получат 12 номеров, среди которых:

И. М. Лифшиц, А. Ю. Гросберг, А. Р. Хохлов. ФИЗИКА ПОЛИМЕРОВ И БИОПОЛИМЕРОВ.

В. П. Минеев. СВЕРХТЕКУЧИЙ ГЕЛИЙ-3.

Ю. П. Гангрский, Б. М. Марков. ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ЯДРА.

М. В. Курик, П. А. Кондратенко. ФОТОГРАФИЯ БЕЗ СЕРЕБРА.

В. А. Данилычев. МОЩНЫЕ ГАЗОВЫЕ ЛАЗЕРЫ.

А. Ф. Крупнов. МИКРОВОЛНОВАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ.

В. М. Шехтер, А. А. Ансельм. АТОМ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ (Сборник переводных статей).

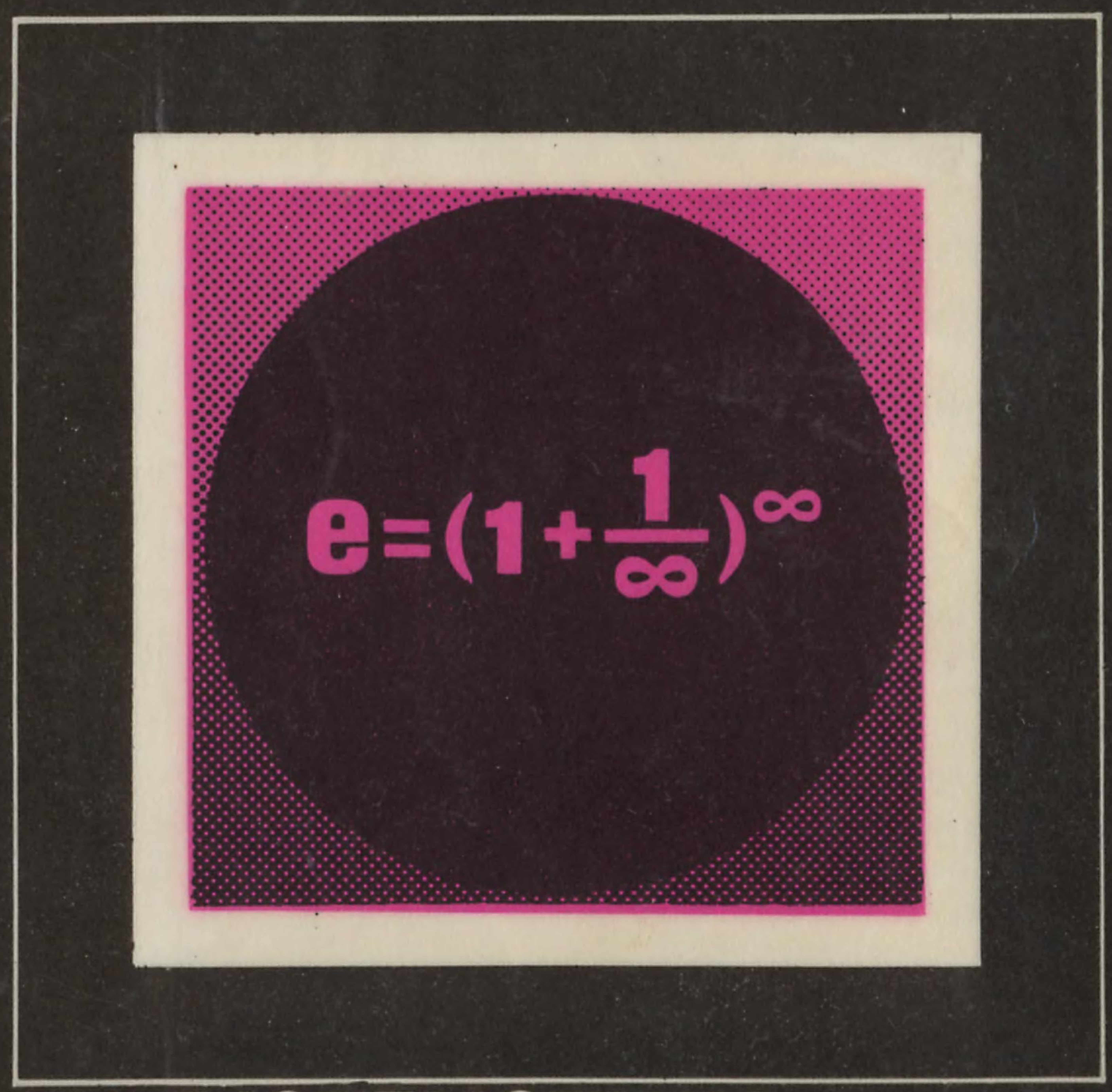
Обращаем ваше внимание на то, что брошюры этой серии в розничную продажу не поступают, поэтому своевременно оформляйте подписку. Индекс серии в каталоге «Союзпечати» — 70102.

11 коп. Индекс 70096

ДОРОГОЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Брошюры этой серии в розничную продажу не поступают, поэтому своевременно оформляйте подписку. Подписка на брошюры издательства „Знание" ежеквартальная, принимается в любом отделении „Союзпечати".
Напоминаем Вам, что сведения о подписке Вы можете найти в „Каталоге советских газет и журналов" в разделе „Центральные журналы", рубрика „Брошюры издательства „Знание".

Цена подписки на год 1 р. 32 к.



СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА